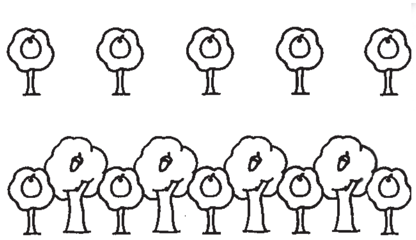
РЕШЕНИЕ РИСУНКОМ (ЧАСТЬ 1)

Есть известная пословица «Лучше один раз увидеть, чем сто раз услышать». Вот и во многих задачах так же — очень полезно сделать рисунок к условию. Во-первых, это помогает разобраться с условием. Во-вторых, рисовать могут все, для этого не нужны какие-то особые умственные способности — только карандаши и бумага. Наконец, удачная визуализация условия иногда сразу приводит к решению. Таким образом, пожелание «если можно сделать рисунок к условию — нарисуй» — довольно содержательное пожелание. Что мы можем здесь посоветовать — если в задаче идет речь, скажем, о мальчиках и девочках, то их не обязательно рисовать с глазами, носами, руками-ногами и т. д. Можно просто нарисовать, скажем, мальчиков квадратиками, а девочек треугольниками или как-нибудь еще, то есть несущественные для задачи подробности можно опустить.

Пример 1. В ряд высадили 5 яблонь. Затем между соседними яблонями посадили по одному дубу. Сколько всего деревьев посажено?



Решение. Нарисуем картинку, соответствующую условию. Так как в задаче сказано «В ряд высадили 5 яблонь», — нарисуем 5 яблонь. Так как сказано «Между соседними яблонями посадили по одному дубу», то нарисуем между яблонями по дубу. Теперь просто подсчитаем количество деревьев. Получится, что их 9 штук. Это и есть ответ.

Замечание. Можно, конечно, было решить чуть более «продвинуто». Пять яблонь в ряд — значит, между ними 4 промежутка. В эти промежутки мы и посадим дубы, вместе получим 9 деревьев. Если бы у нас было бы 100 яблонь, а не 4 — видимо, так было бы правильнее, не пришлось бы очень много рисовать. Но для данной задачи рисунок это простое, быстрое и не оставляющее вопросов решение.

Пример 2. Силач одним ударом разбивает любой камень на три камня поменьше. За сколько ударов он разобьет камень на 9 камней поменьше?

Решение.

• Сначала был один камень. Его и нарисуем.

• Теперь нарисуем, что будет после первого удара. Это три камня поменьше.

• Выберем какой-нибудь из этих трех камней и нанесем по нему удар. Вместо него появятся три новых, а всего камней станет 5.

• Так как камней еще не 9, то надо продолжать наносить удары. Выберем какой-нибудь из пяти камней и ударим по нему. Вместо него появятся три новых, а вместе камней станет 7.

• Еще раз ударим по какому-нибудь камню, и камней получится как раз 9. Значит, один камень превращается в кучку из девяти камней за 4 удара.

Замечание. Заметим, что в решении рисунком этой задачи не хватает математическом строгости: остается неясным, влияет ли на результат выбор камня для удара на каждом шаге. Интуитивно понятно, что не влияет, но все же приведем более строгое решение.

Можно заметить, что один удар увеличивает количество камней на два — действительно разбиваемый камень исчезает, вместо него появляются три новых. Так как нам надо увеличить общий счет камнем на 8, то ударов, соответственно, должно быть 8:2=4. Это хорошее решение, но доступно далеко не всякому младшему школьнику — тут надо и заметить увеличение при ударе общего количества на 2, и выполнить деление. Решение же рисунком доступно любому.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 1. У Кати 4 брата и 3 сестры. Сколько сестер у Катиного брата Пети?

Задача 2. У марсиан по 3 руки. Пять марсиан встали в ряд и взялись за руки. Взяться с кем-то за руки у них то же, что и у нас, — взять одной рукой руку одного соседа, другой — другого (если он есть, другими словами, если ты не с краю). Сколько рук остались свободными?

Задача 3. Петя забил по кругу 5 гвоздей, а потом между каждыми двумя натянул веревочку. Сколько веревочек ему понадобилось?

Задача 4. На столе лежат 10 кубиков. У каждого кубика грани разных цветов (например, одна красная, вторая фиолетовая, третья зелёная и так далее). У 7 из них есть синяя грань, у 6 есть красная грань, при этом нет ни одного кубика без синей или красной грани. У какого количества кубиков есть и синяя, и красная грани?

Задача 5. Петя гулял вдоль улицы. Сначала он шел по правой стороне. Потом ему стало скучно, и он перешел на левую сторону. После этого он переходил улицу еще 7 раз, пока не встретил Васю. На какой стороне улицы он встретил Васю?

Задача 6. На бал приехали 4 графа, каждый со своей женой — графиней. Каждый граф пожал руку всем, кроме своей собственной жены. Графини друг другу руки не пожимали. Сколько всего было рукопожатий?

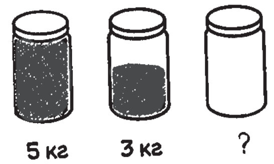
Задача 7. Костя сел в третий вагон от начала поезда и встретил там Машу, которая села в четвертый вагон от конца. Сколько вагонов в поезде?

Задача 8. На бревне нарисованы поперечные кольца — красные, синие и зеленые. Если бы мы распилили бревна по красным кольцам, то получилось бы 5 частей. Если по синим — получилось бы три части, а если по зеленым — то две. А сколько получится частей, если распилить сразу по всем кольцам?

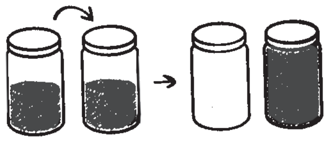
РЕШЕНИЕ РИСУНКОМ (ЧАСТЬ 2)

В разделе «Решение рисунком — 1» картинка к задаче сразу приводила к решению — ответ получался непосредственно в результате изображения условия. Здесь нам тоже существенно поможет рисунок, но для получения ответа надо будет потрудиться побольше — заметить на рисунке что-то полезное для решения.

Пример 1. Банка с вареньем весит 5 кг. Пришел Костя, съел половину варенья. Банка с тем, что осталось, весит 3 килограмма. Сколько весит пустая банка?



Решение. Речь в задаче идет о банке с вареньем и о банке с половиной варенья. Нарисуем рядом эти банки. Банки отличаются тем, что во второй банке половины варенья нет. Значит то, что вес стал меньше на 5-3=2 кг произошло из-за того, что мы убрали половину варенья. Значит, половина варенья это 2 кг. Уберем из правой банки все варенье, — останется пустая банка, а вес ее будет 3-2=1 кг.

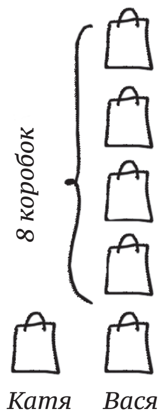


Можно было сделать по-другому, например, так: нарисуем две полупустые банки. Рядом изобразим то, что получится, если из одной из них перелить варенье в другую. Вес двух полупустых банок равен 3+3=6 кг. Значит то, что нарисовано справа, тоже весит 6 кг. Но мы знаем, что полная банка весит 5 кг. Значит, пустая банка весит 6-5=1 кг.

Замечание. Можно было решить задачу, составив систему уравнений:

Пусть пустая банка весит Б, а варенье в полной банке весит В. Так как полная банка весит 5 кг, то Б+В=5. Банка с половиной варенья весит 3 кг, значит, Б+В:2=3. Далее решаем систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Нам кажется, что решение рисунком гораздо естественней и потому — понятнее детям.

Пример 2. Вася купил в магазине 7 кг конфет. Катя купила в 5 раз меньше. Все конфеты были в одинаковых коробках, которых Катя купила на 8 меньше, чем Вася. Сколько коробок конфет они купили вместе?



Решение. Пусть Катя положила все свои конфеты в пакет — рисуем этот пакет. Васины конфеты соответствуют пяти таким пакетам, поскольку он купил в 5 раз больше. Рисуем рядом с Катиным пакетом 5 Васиных пакетов. Из-за чего у Васи на 8 коробок конфет больше — где они, эти коробки? Из рисунка понятно, где — в четырёх пакетах. Значит, в одном пакете 8:4=2 коробки. Так как у Васи и Кати вместе 6 пакетов, а в каждом 2 коробки, то вместе они купили 2х6=12 коробок.

Замечание. Условие про 7 кг было лишним — мы нигде не использовали то, что Вася купил именно 7 кг. Не имея подходящего рисунка, дети обычно начинают делить 7 кг Васиных конфет на 5, что 1) сильно усложняет решение, особенно когда деление приводит к операциям с дробями, и 2) уменьшает понимание сути задачи.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 1. Путешественники за 4 дня прошли 60 километров, причем в каждый следующий день они проходили в 2 раза больше, чем в предыдущий. Какой путь они прошли во второй день?

Задача 2. Пароход отправился в рейс. Когда он отошел от берега на 180 км, за ним вылетел самолет с экстренной почтой. Аэропорт находится там же, где и морской порт. Скорость самолета в 10 раз больше скорости парохода. На каком расстоянии от берега самолет догонит пароход?

Задача 3. В группе из 50 ребят некоторые знают все буквы, кроме «р», которую просто пропускают при письме, а остальные знают все буквы, кроме «к», которую тоже пропускают. Однажды учитель попросил 10 учеников написать слово «кот», 18 других учеников — слово «рот», а остальных — слово «крот». При этом слова кот» и «рот» оказались написанными по 15 раз. Сколько ребят написали свое слово верно?

Задача 4. Крош, Нюша и Ежик играют в шахматы на вылет. Игра на вылет означает, что двое играют, а третий ждет. Тот, кто проиграл партию, уступает место третьему и в следующей партии сам ждет. Крош сыграл всего 12 партий, Нюша — 7 партий, Ежик — 11 партий. Сколько раз Крош выиграл у Нюши?

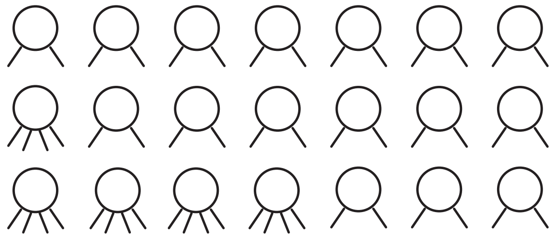
Задача 5. Алиса и Белый Кролик в полдень вместе вышли из домика Кролика и пошли на прием к Герцогине. Пройдя полпути, Кролик вспомнил, что забыл перчатки и веер, и вернулся за ними домой. Алиса же продолжила свой путь, не дожидаясь Кролика. В результате Алиса пришла к Герцогине за 5 минут до начала приема, а Кролик опоздал на 10 минут. Алиса и Кролик шли с постоянными и одинаковыми скоростями. На какое время был назначен прием у Герцогини?

Задача 6. Инженер ежедневно приезжает поездом на вокзал в 8 часов утра. Точно в 8 часов к вокзалу подъезжает автомобиль и отвозит инженера на завод. Сегодня инженер приехал на вокзал в 7 часов утра и пошел навстречу машине. Встретив машину, он сел в нее и приехал на завод на 20 минут раньше, чем обычно. Сколько времени инженер шел пешком? Скорости автомобиля и инженера постоянны.

ГОЛОВЫ И НОГИ

Вообще говоря, эти задачи относятся к разделу «Решение рисунком — 2». Мы все же выделили отдельно эту тему, так как решения и рассуждения здесь в каком-то смысле «крутятся» вокруг одной и той же несложной идеи. Идею мы проиллюстрируем в примерах 1 и 2.

Пример 1. Во дворе гуляют несколько уток и поросят. Всего вместе их семь, а ног у них на всех 22. Сколько уток и сколько поросят гуляют во дворе?



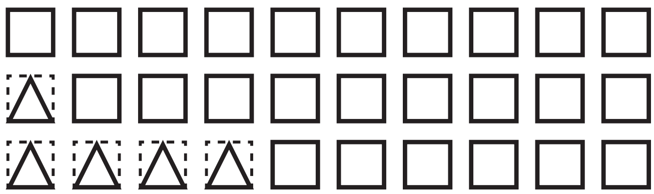
Решение. Нарисуем семь кружочков — это туловища, и к каждому по две ноги — получатся утки. Посчитаем количество ног — их получится 14. Мало, нам надо 22. Заменим утку на поросенка — пририсуем две ноги какой-нибудь из уток. Ног стало 16, все равно мало. Будем и далее изготавливать из уток поросят до тех пор, пока количество ног не станет 22. Из картинки видно, что это так, когда поросят четверо, а уток три. Это и есть ответ в задаче.

Замечание 1. Можно было сделать и по-другому — сначала нарисовать поросят, а потом делать из них уток, стирая по две ноги.

Замечание 2. У ребят младшей школы редко возникают задачи, в которых есть несколько ответов. Тем не менее, все же надо бы спросить «А есть ли другое решение — другое количество уток и поросят, которое тоже подходит к нашей задаче?». Для этого возраста объяснение того, что других ответов нет, выглядит, например, так: «Мы заменяли уток на поросят. В какой-то момент стало 22 ноги — столько, сколько и должно быть по условию. Если мы будем и далее менять уток на поросят, то количество ног будет только увеличиваться, и, значит, будет более 22. Значит, другое количество уток и поросят нам не подойдет».

Замечание 3. Можно было решать задачу и совсем по-другому. Обозначим количество уток через У, а поросят через П. Так как вместе их 7, то П+У=7. Так как у утки две ноги, у поросенка 4, то 4П+2У=22. Осталось решить систему из двух уравнений с двумя неизвестными. Это, вообще говоря, не для младшей школы, да и решение рисунком быстрее и нагляднее.

Пример 2. На каждой из 10 карточек Коля нарисовал треугольник или квадрат. Всего он провел 36 отрезков. Сколько квадратов он начертил?



Решение. Нарисуем 10 квадратов и подсчитаем отрезки. Их получится 40, это много. Сотрем один квадрат и нарисуем вместо него треугольник. Отрезков стало 39, все равно много. Будем и далее заменять квадраты на треугольники, пока количество отрезков не достигнет 36. Это произойдет, когда треугольников станет четыре, а квадратов, соответственно, шесть.

Замечание 1. Можно было бы сначала нарисовать не квадраты, а треугольники.

Замечание 2. Можно вообще не рисовать, а просто рассуждать — примерно так: «Если бы все были треугольники, то отрезков было бы 3×10=30. Но нам надо 36 отрезков, значит, 6 отрезков не хватает. Замена треугольника на квадрат увеличивает общее количество отрезков на 1. Получается, что нам надо 6 треугольников поменять на квадраты. Значит, у нас получится 6 квадратов и 4 треугольника».

Вообще при решении задач на эту тему не обязательно приводить рисунки к задачам, можно решать «через суждения». По сути «через рассуждения» — это описание того, как мы решали бы рисунком.

ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

Задача 1. У 10 двухколесных и трехколесных велосипедов вместе 27 колес. Сколько среди этих велосипедов трехколесных и сколько двухколесных?

Задача 2. Деся ти собакам и кошкам скормили 56 сосисок. Каждой собаке досталось шесть сосисок, каждой кошке — пять. Сколько было собак и сколько кошек?

Задача 3. Две команды сыграли друг с другом 10 матчей, причем за победу в матче команда получала 4 очка, за ничью — 2 очка и за проигрыш — 1 очко. Вместе обе команды набрали 46 очков. Сколько было ничьих?

Задача 4. Ученики одного класса съели 95 конфет, причем каждый мальчик съел 3 конфеты, а каждая девочка — 5 конфет. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек, если всего в классе 25 человек?

Задача 5. В стаде, состоящем из лошадей, двугорбых и одногорбых верблюдов, всего можно насчитать 20 горбов. Сколько животных в стаде, если число лошадей равно числу двугорбых верблюдов?

Задача 6. В комнате стоят трехногие табуретки и стулья с четырьмя ногами — всего 22 предмета. Когда на все стулья и табуретки сели люди, в комнате стало 120 ног. Сколько табуреток и сколько стульев в комнате?

Задача 7. В офисе 16 столов с одним, двумя и тремя ящиками, всего 30 ящиков. Столов с двумя ящиками столько, сколько с одним и тремя вместе. Сколько столов с тремя ящиками?

Задача 8. На экзамене Васе задали 30 вопросов. За каждый правильный ответ ему начислялось 7 баллов, за каждый неправильный ответ с него снималось 12 баллов. Сколько верных ответов дал Вася, если он набрал 77 баллов?

Задача 9. Мальчики и девочки собирали в саду яблоки на варенье. Каждая девочка сорвала 4 яблока а каждый мальчик — 6. Всего было собрано 26 яблок. Сколько могло быть девочек?

ЗАДАЧИ С МНОЖЕСТВАМИ — ПОДХОДЯЩИЕ СХЕМЫ. КРУГИ ЭЙЛЕРА

Решение задан этой темы предполагает, что мы нарисуем удачную схему, соответствующую условию. Схема может состоять из отрезков, точек, кругов, прямоугольников и т.д. — выбор широк, главное хорошо отобразить основные моменты условия. Приведем примеры.

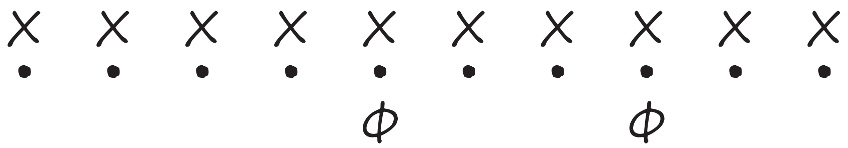
Пример 1. Во втором классе все мальчики ходят в секции футбола и хоккея — кто-то в одну, а кто-то в обе. Десять ребят занимаются хоккеем, шесть — футболом, двое из них играют и в футбол, и в хоккей. Сколько мальчиков в классе? Сколько мальчиков играют только в хоккей?

Замечание 1. Мы назвали тему «Задачи с множествами». Множеств в данном примере четыре — все мальчики класса, те, кто играют в футбол, те, кто играют в хоккей и те, кто занимаются обоими видами спорта.

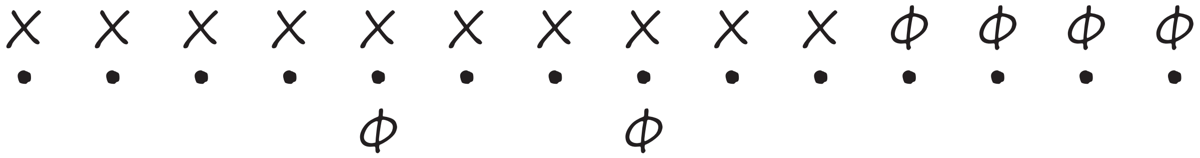
Замечание 2. Этот пример мы разберем максимально подробно — приведем четыре решения и обсудим их. Если вы занимаетесь с достаточно большой группой ребят, можно решать задачу, назначив кого-то футболистом, кого-то хоккеистом и размещая их в группы прямо в аудитории, — им это нравится.

Решение 1. Выстроим в ряд всех мальчиков. Сначала поставим тех 10 ребят, которые занимаются хоккеем. Нарисуем соответствующую схему.

Вспомним, что двое из них занимаются футболом. Выберем как-нибудь двух из них и припишем им занятия еще и футболом. Получится, например, так:

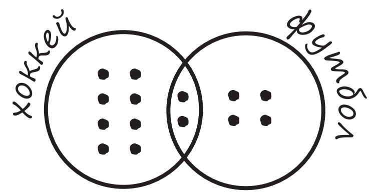


Теперь нам надо добавить футболистов так, чтобы их стало шесть. Ни одному хоккеисту, кроме тех, что занимаются футболом, мы не можем больше приписать занятия футболом, потому оставшиеся 4 футболиста — другие люди . Нарисуем их, например, справа:

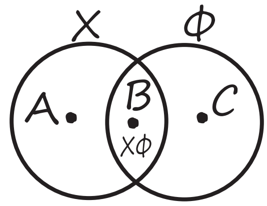


Картинка завершена . Посчитаем ребят — их получится 14. Только в хоккей, как видно, играют 8 человек.

Решение 2. Нарисуем два круга . Поместим всех, кто играет в хоккей, в левый круг, тех, кто играет в футбол, — в правый. Круги обязаны пересекаться, так как есть ребята, занимающиеся обоими видами спорта. В пересечении оказались, таким образом, два человека. Нарисуем недостающих ребят точками так, чтобы выполнялись условия задачи. Получилась полная картина — кто чем занимается. Видно, что мальчиков в классе всего 14, а только в хоккей играют 8 человек.

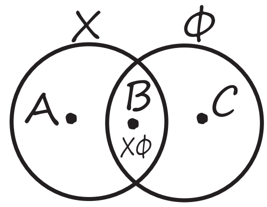


Решение 3. Как и в решении 2, нарисуем два круга. В левом круге будут хоккеисты, в правом — футболисты, в пересечении — те, кто занимается обоими видами спорта.



Обозначим количество хоккеистов — Х, количество футболистов — Ф, а количество ребят в пересечении, тех, кто занят обоими видами, — ХФ. Начнем считать сколько всего ребят: сначала посчитаем всех хоккеистов, потом — всех футболистов. Заметьте — человека А, который занимается только хоккеем, мы посчитали один раз — когда считали футболистов. А вот человека В, который занимается и футболом, и хоккеем, мы посчитали два раза — один раз в хоккеистах и один раз в футболистах. Значит, чтобы получить верное число ребят в классе, надо ХФ один раз отнять.

Окончательно получаем, что ВСЕ=Х+Ф−ХФ. Подставим данные примера, получим, что ВСЕ=10+6−2=14. Значит, в классе 14 ребят. Основная часть примера выполнена, подсчитать, что только в хоккей играют 8 человек, уже несложно.



Решение 4. Опять нарисуем два пересекающихся круга. В левом круге, как обычно, хоккеисты, в правом — футболисты. Картинка очевидно состоит из трех частей: часть А — те, кто занимается только хоккеем, часть В — те, кто и хоккеем, и футболом, С — только футболом. Количество ребят в каждой из частей тоже будем обозначать А, В и С. Так как хоккеистов всего 10, то А+В=10. Так как футболистов 6, то В+С=6. Так как двое играют и в футбол, и в хоккей, то В=2. Отсюда уже легко получается, что А=8, С=4, и всего ребят в классе А+В+С=14.

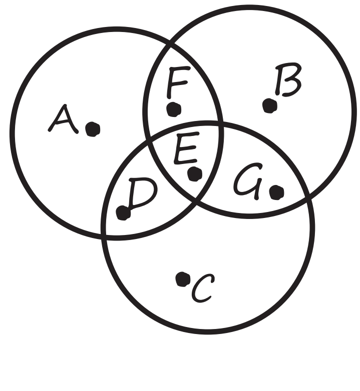
Обсуждение решений

Решения 1 и 2, видимо, наиболее просты. Однако, если б у нас добавились, например, волейболисты, а кто-нибудь играл в два вида спорта, а кто-то и в три, то картинку существенно труднее было бы «подогниать». Добавим также что, если б ребят было не 14, а, скажем, 114, то рисование заняло бы много времени. Таким образом, решения 1 и 2 хороши, когда у нас две группы занятий и действующих лиц не очень много.

Решение 3 использует схему, исследуя которую мы, не прибегая к численным значениям из условия, получаем общую формулу для задач такого сорта. Схемы такого вида называют «круги Эйлера». То, что решение в каком-то смысле универсальное, очень хорошо, мы рекомендуем для решения задач именно такой подход.

Решение 4 похоже на решение 2, но в силу его «алгебраичности» мы избавляемся от необходимости рисовать точки (а их может оказаться очень много). Данную задачу мы решили просто, но если бы было известно количество всех ребят, а занимающихся и футболом, и хоккеем неизвестно, то при таком подходе нам пришлось бы решать систему из трех уравнений с тремя неизвестными В этом ничего страшного нет, но ребятам, видимо, понятнее будут решения 1-3.

Пример 2 (схема — круги Эйлера). 16 человек зашли в магазин, и каждый совершил покупки. У 7 человек среди покупок были яблоки, у 11 — хурма. Яблоки и груши были среди покупок у 3 человек, яблоки и хурма — у 4, хурма и груши — у 5. (Когда мы пишем, например, «у 7 человек среди покупок были яблоки», это означает, что у некоторых из них могли быть и другие фрукты кроме яблок. Один человек купил и яблоки, и хурму, и груши. Сколько человек купили груши?

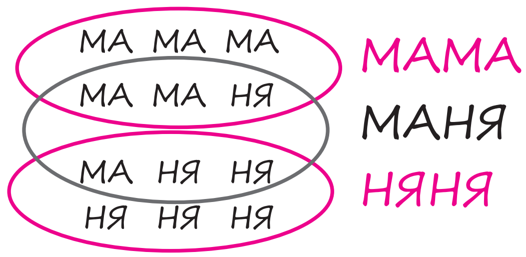


Решение. Тех, у кого есть яблоки, поместим в верхний левый круг. У кого груши — в нижний, у кого хурма — в верхний правый. Люди у нас оказались несскольких типов, как видно. Давайте назовем эти типы. Скажем, что люди Я — это те, у кого есть яблоки. Это у нас A, F, D и E. Люди Х — у кого есть хурма. Это B, F, E и G. Люди Г — у кого есть груши. Люди ЯХ — у кого в покупках есть яблоки и хурма, это F и E. Люди ЯГ — у кого есть яблоки и груши, это D и E. ХГ — у кого есть хурма и груши, это E и G. Наконец, ЯХГ — у кого есть все три фрукта, это E. Наконец, всех людей, которые фигурируют у нас в задаче, так и назовем — ВСЕ. Далее количество людей в группе будем обозначать так же, как и саму группу.

Давайте попробуем подсчитать всех людей. Напишем так: ВСЕ=Я+Х+Г. Это точно не так, потому что людей ЯХ мы посчитали два раза — один раз в Я, другой раз в Х. Ну раз мы их один лишний раз посчитали, давайте этот лишний раз уберем, подправим формулу: ВСЕ=Я+Х+Г—ЯХ—ЯГ—ХГ. Теперь все люди, кроме людей ЯХГ, подсчитаны правильно, по одному разу, а вот с ЯХГ получилось так: мы их сначала посчитали три раза — в Я, в Х и в П а потом три раза вычли — в ЯХ, в ЯГ и в ХГ. То есть, получается, мы их вообще не подсчитали. Ну так давайте подсчитаем, прибавим их: ВСЕ=Я+Х+Г—ЯХ—ЯГ—ХГ+ЯХГ. Вот теперь формула верна, в правой части каждый человек подсчитан ровно один раз. А теперь подставим данные задачи: 16=7+11+Г—3—4—5+1. Из этого равенства следует, что Г=9, то есть груши купили 9 человек.

Пример 3 (просто удачная схема). В детский сад завезли карточки для обучения чтению: на некоторых написано «МА», на остальных — «НЯ». Каждый ребенок взял три карточки и стал составлять из них слова. Оказалось, что слово «МАМА» могут сложить из своих карточек 20 детей, слово «НЯНЯ» — 30 детей, а слово «МАНЯ» — 40 детей. У скольких ребят все три карточки одинаковы?

Решение. Возможных наборов из трех карточек — 4 вида: «МА МА МА», «МА МА НЯ», «МА НЯ НЯ», «НЯ НЯ НЯ». Отметим на рисунке, кто может сложить «МАМА», «МАНЯ» и «НЯНЯ». Из картинки легко видно, что всего детей — 50, так как они распадаются на две группы — те, кто может написать «МАМА», и те, кто может написать «НЯНЯ». А одинаковые карточки у тех, кто не может сложить слово «МАНЯ». Значит, детей с одинаковыми карточками 50—40=10.



ЗАДАЧИ

Задача 1. В школе два кружка — кружок пения и кружок шахмат. В классе 15 человек, и каждый занимается в одном из этих кружков, а некоторые и в обоих. Одиннадцать человек посещают кружок шахмат, восемь — кружок пения. Сколько человек занимаются в обоих кружках? Сколько человек не играют в шахматы?

Задача 2. В классе послушных девочек столько же, сколько непослушных мальчиков Кого больше — послушных детей или мальчиков?

Задача 3. У 28 человек 4 «ы» класса на собрание пришли папы и мамы. Мам было — 74, пап — 18. У какого количества учеников на собрании одновременно могли быть и папа и мама? (У некоторых детей родители могли вообще не прийти. В классе нет ни братьев, ни сестер.)

Задача 4. Сорок детей водили хоровод. Из них 22 держали за руку хотя бы одного мальчики и 30 держали за руку хотя бы одну девочку. Сколько девочек было в хороводе?

Задача 5. На выставку привезли 25 собак. 12 из них большие, 8 маленькие, остальные средние. Только 10 из участников выставки породистые, остальные — дворняжки. Среди дворняжек поровну больших, маленьких и средних. Сколько больших породистых собак привезли на выставку? А сколько породистых среднего размера?

Задача 6. По данным опроса, проведенного в 4-м классе, выяснилось, что пятая часть тех, кто любит математику, любят еще и музыку, а четверть тех, кто любит музыку, любят еще и математику. Только Никите и Маше не интересны ни музыка, ни математика. Сколько учеников в классе, если известно, что их больше 20, но меньше 30?

Задача 7. Все 20 жителей деревни СероБуроМалиновка носят одежду либо серого, либо бурого, либо малинового, либо серо-буро-малинового цвета. При этом в одежде 6 жителей есть серый, в одежде 5 — малиновый. Сколько жителей носят одежду малинового цвета?

Задача 8. Каждый ученик в классе знает хотя бы один язык: 15 ребят знают английский язык, 16 — немецкий, 20 — французский и 21 — испанский язык. В классе нет ребят, знающих более двух языков, и 23 человека знают ровно два языка из перечисленных. Сколько учеников знают ровно один язык из перечисленных?

ЗАДАЧИ О СООТВЕТСТВИИ

Мы сформулируем и подробно разберем одну задачу на соответствие. Почему задачи называются «на соответствие», будет понятно из самих формулировок.

Пример 1. На одном заводе работали три друга: слесар, токарь и плотник. Их фамилии Борисов, Иванов и Семенов. Профессии и фамилии названы в произвольном порядке. У слесаря нет ни братьев, ни сестер. Он самый младший из друзей. Семенов женат на сестре Борисова. Токарь младше Семенова. Назовите фамилии слесаря, токаря и плотника.

Подход 1 — перебор вариантов. Ограничимся пока тем, что у нас есть три человека — Борисов, Иванов и Семенов и три профессии — слесарь, токарь и плотник. Про остальные условия пока забудем. Распределим эти профессии по людям всеми возможными способами. Всего возможных вариантов получится 6, вот они:

Давайте теперь вспомним про остальные условия задачи и посмотрим, какие из вариантов нам подходят. Варианты 1 и 2 не подходят, так как в условии сказано «У слесаря нет ни братьев, ни сестер. ... Семенов женат на сестре Борисова.» Значит, у Борисова есть сестра и, следовательно, слесарем он быть не может, а в вариантах 1 и 2 он как раз слесарь.

Вариант 3 тоже не подходит — в условии сказано «У слесаря нет ни братьев, ни сестер. Он самый младший из друзей.... Токарь младше Семенова». В 3 варианте Семенов — слесарь и, значит, самый младший. Значит, токарь — в этом варианте он Борисов — не может быть его младше, а по условию должен. Вариант 3 отбрасываем.

Вариант 4 подходит — там нет никаких противоречий.

Давайте рассмотрим варианты 5 и 6 — не исключено, что какой-нибудь из них тоже подойдет и в задаче будет несколько ответов (так бывает).

Вариант 5 не подходит из-за того, что, как и в варианте 3, Семенов рпять слесарь и по условию младше всех. Значит, токарь (в этот раз Иванов) не может быть его младше, а по условию должен.

Вариант 6 не подходит, так как тогда Семенов — токарь, а в условии сказано «токарь младше Семенова». Значит, в задаче ровно один ответ — вариант 4.

Подход 2 — «рассуждения»

Перенумеруем для удобства требования из условия задачи.

1. У слесаря нет ни братьев, ни сестер.
2. Слесарь — самый младший из друзей.
3. Семенов женат на сестре Борисова.
4. Токарь младше Семенова.

Из условий 1 и 3 следует, что Борисов не слесарь. Из условий 2 и 4 следует, что Семенов тоже не слесарь. Значит, слесарем может быть только Иванов. Из условия 4 следует, что Семенов не токарь. Так как Семенов и не слесарь, и не токарь, то он плотник. Для Борисова теперь осталась одна профессия — токарь.

	Борисов	Иванов	Семенов
1	слесарь	токарь	плотник
2	слесарь	плотник	токарь
3	токарь	плотник	слесарь
4	токарь	слесарь	плотник
5	плотник	токарь	слесарь
6	плотник	слесарь	токарь

Подход 3 — решение с помощью таблиц

Составим таблицу, столбцы в которой будут соответствовать фамилиям, а строки — профессиям.

В каждую клетку будем ставить 1, если комбинация допустима, 0 — если нет . Вам не надо каждый раз рисовать новую таблицу, ее можно заполнять постепенно . Мы же будем показывать ее постепенное заполнение, потому перерисуем несколько раз.

Выпишем требования из условия задачи:

1. У слесаря нет ни братьев, ни сестер
2. Слесарь — самый младший из друзей.
3. Семенов женат на сестре Борисова
4. Токарь младше Семенова.

Из условий 1 и 3 следует, что Борисов не слесарь. Ставим 0 в соответствующую клетку. Таблица станет такой:

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0		
токарь			
плотник			

Из условий 2 и 4 следует, что Семенов тоже не слесарь. Ставим 0 в соответствующую клетку.

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0		0
токарь			
плотник			

Видно, что слесарем может быть только Иванов, поставим 1 в соответствующей клетке. Так как Иванов — слесарь, то ни токарем, ни плотником он уже быть не может. Поставим 0 в эти клетки.

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0	1	0
токарь		0	
плотник		0	

Из условия 4 следует, что Семенов — не токарь. Отметим это в таблице.

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0	1	0
токарь		0	0
плотник		0	

Для Семенова, как видно, осталась одна возможность — он плотник. Поставим 1 в соответствующей клетке. Место плотника теперь занято, значит, Борисов — не плотник. Ставим 0.

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0	1	0
токарь		0	0
плотник	0	0	1

Очевидно, для Борисова осталась ровно одна профессия — токарь. Ставим 1.

	Борисов	Иванов	Семенов
слесарь	0	1	0
токарь	1	0	0
плотник	0	0	1

Значит, Борисов — токарь, Иванов — слесарь, Семенов — плотник.

ОБСУЖДЕНИЕ ПОДХОДОВ

Перебор. Если бы в примере 1 людей и профессий было бы не 3, а 4, то вариантов стало бы 24, уже немало. Если бы 5, то уже 120. Таким образом, при не очень большом усложнении задачи число вариантов возрастает существенно. Потому перебор годится тогда, когда вариантов немного, — как в примере 1.

Рассуждения. Задачу 1 мы довольно быстро сделали с помощью рассуждений, и такой способ кажется наиболее «красивым». Однако чем больше действующих лиц, тем больше связей между ними придется удерживать в голове и при этом надо не запутаться. Это удается немногим. Если у Вас это получится — прекрасно, ситуация такая же, что и с перебором, — подход хорош, когда вариантов не много.

Таблица. Решение с помощью таблиц нечто среднее между перебором и «рассуждениями». По сравнению с перебором мы тратим меньше сил, по сравнению с «рассуждениями» мы существенно снижаем риск запутаться — хотя бы в силу наличия таблицы, где отмечаем связи.

ЗАДАЧИ

Задача 1. В автомобильных гонках три первых места заняли Алеша, Петя и Коля. Какое место занял каждый из них, если Петя занял не второе и не третье место, а Коля не третье?

Задача 2. Леня Женя и Миша имеют фамилии Орлов, Соколов и Ястребов. Какую фамилию имеет каждый мальчик, если Женя, Миша и Соколов — члены математического кружка, а Миша и Ястребов занимаются музыкой?

Задача 3. Нина, Валя, Инна, Марина и Костя собирали фрукты. Трое ребят собирали яблоки, двое — груши. Костя и Марина собирали одинаковые фрукты, Марина и Валя — разные. Что собирал каждый из ребят, если Валя и Нина собирали разные фрукты?

Задача 4. В бутылке, стакане, кувшине и банке находятся молоко, лимонад, квас и вода. Известно, что вода и молоко не в бутылке, сосуд с лимонадом стоит между кувшином и сосудом с квасом, в банке не лимонад и не вода. Стакан стоит около банки и сосуда с молоком. Что во что налито?

Задача 5. Маша разложила свои вещи по трем разноцветным коробкам, стоящим у стены: в одну — игрушки, в другую — журналы, а в третью — фотографии. Известно, что белая коробка правее, чем игрушки, и что фотографии правее, чем белая коробка. В какой коробке лежат фотографии, если желтая коробка стоит левее чем зеленая?

Задача 6. Собираясь в школу, Миша нашел под подушкой, под диваном, на столе и под столом все необходимое: тетрадь, шпаргалку, плеер и кроссовки. Под столом он нашел не тетрадь и не плеер. Мишины шпаргалки никогда не валяются на полу. Плеера не оказалось ни на столе, ни под диваном. Что где лежало, если в каждом из мест находился только один предмет?

Задача 7. По кругу в каком-то порядке сидят Иванов, Петров, Марков и Карпов. Их имена Андрей, Сергей ,Тимофей, Михаил. Известно, что Иванов не Андрей и не Михаил. Сергей сидит между Марковым и Тимофеем. Петров сидит между Карповым и Андреем. Как зовут Иванова, Петрова, Маркова и Карпова?

Задача 8. Соревнования по плаванию были в самом разгаре, когда стало ясно, что первые четыре места займут мальчики из пятерки лидеров. Их имена: Валера, Коля, Миша, Игорь, Эдик, фамилии: Симаков, Чигрин, Зимин, Копылов, Блинов (имена и фамилии названы в различном порядке). Нашлись знатоки, которые предсказали, что первое место займет Копылов, второе — Валера, третье — Чигрин, четвертое — Эдик. Но ни один из ребят не занял того места, какое ему предсказывали. На самом деле первое место завоевал Миша, второе — Симаков, третье — Коля, четвертое — Блинов, а Чигрин не попал в четверку сильнейших. Назовите имя и фамилию каждого из лидеров.

РЫЦАРИ И ЛЖЕЦЫ. ПЕРЕБОР

В задачах на эту тему обычно фигурируют так называемые рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда врут. Живут они, как правило, на острове, на котором никто, кроме них, не живет. Иногда, правда, остров могут посещать туристы, которые обычно задают им вопросы. Иногда присутствуют другие персонажи, их поведение всегда поясняется в условии. В задаче нам предоставляют информацию о группе рыцарей и лжецов — что про кого известно, кто что сказал и т.д., а нам надо выяснить подробности — кто рыцарь, а кто лжец, или сколько в этой группе рыцарей — и тому подобное. Решать можно по-разному, чаще всего используют три способа — рассуждения, полный перебор (если он возможен) и разумный перебор (когда часть вариантов можно быстро отсечь простыми соображениями). Перебор, как обычно, хорош тогда, когда надо перебирать не очень много вариантов.

Пример 1. Турист повстречал на острове местного жителя и задал ему вопрос: «Вы рыцарь или лжец?». Какой ответ получит турист?

Решение. Сделаем небольшой перебор: островитянин может быть 1) рыцарем; 2) лжецом. В первом случае он скажет правду — «Я рыцарь». Во втором случае он солжет и тоже скажет «Я рыцарь». Получается, что турист в любом случае услышит в ответ «Я рыцарь».

Пример 2. Островитянин Вася сказал островитянину Пете: «По крайней мере один из нас — рыцарь». «Ты лжец», — ответил ему Петя. Кто из них кто?

Решение. При решении перебором предстоит рассмотреть четыре ситуации:

1. Вася — рыцарь, Петя — рыцарь.
2. Вася — рыцарь, Петя — лжец.
3. Вася — лжец, Петя — рыцарь.
4. Вася — лжец, Петя — лжец.

Первая ситуация невозможна, так в этом случае рыцарь Петя сказал неправду. Вторая ситуация полностью подходит — каждый сделал то, что ему положено — рыцарь сказал правду, лжец солгал. Рассмотрим остальные ситуации — может оказаться, что нам подходит еще какая-нибудь. Ситуация 3 невозможна, так как в ней лжец Вася сказал правду. Наконец, ситуация 4 невозможна, так как в ней лжец Петя говорит правду. Итак, в ответе получаем только один вариант — Вася рыцарь, а Петя лжец.

ЗАДАЧИ

В задачах ниже мы предполагаем сразу, что если речь идет об острове, то это остров рыцарей и лжецов.

Задача 1. В Лесогории живут только эльфы и гномы. Гномы лгут, говоря про свое золото, а в остальных случаях говорят правду. Эльфы лгут, говоря про гномов, а в остальных случаях говорят правду. Однажды два лесогорца сказали:

А: — Все мое золото я украл у дракона.

Б: — Ты лжешь.

Определите, эльфом или гномом является каждый из них.

Задача 2. Между островитянами Тимом и Томом произошел следующий диалог:

— Ты можешь сказать, что я рыцарь, — гордо заявил Тим.

— Ты можешь сказать, что я лжец, — грустно ответил ему Том.

Кем являются Тим и Том?

Задача 3. Собрались островитянки Аня, Вика и Соня. Аня сказала: «Мы все трое рыцари», Вика сказала: «Мы все трое лжецы». Соня промолчала. Скажите, кто из них кто.

Задача 4. Турист подошел к группе из трех жителей острова. На вопрос, кто из них рыцарь, а кто лжец, островитяне ответили так: Вася: «Мы все лжецы», Петя: «Среди нас только один рыцарь», Костя вообще промолчал. Определите для каждого — рыцарь он или лжец.

Задача 5. В одном лесу живут только два племени — племя зайцев и племя лис. Лисы всегда лгут, а зайцы всегда говорят правду. На поляне собрались три зверя. Первый сказал: «Я здесь единственный представитель своего племени». Второй сказал: «Да, из его племени он здесь один». Третий сказал: «Да, лиса одна». Определите, сколько среди них могло быть лис?

Задача 6. На острове живут рыцари и лжецы — всего 7 человек. Каждый житель острова заявил: «Среди оставшихся жителей острова более половины — лжецы». Сколько лжецов на острове?

Задача 7. Собрались три попугая — Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий — хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжет. На вопрос: «Кто Кеша?» попугаи ответили так. Гоша:

— Кеша — лжец.

Кеша: — Я хитрец!

Рома: — Он абсолютно честный попугай.

Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?

РЫЦАРИ И ЛЖЕЦЫ. РАССУЖДЕНИЯ БЕЗ ПЕРЕБОРА

Перебор хорошо использовать тогда, когда вариантов немного . В задачах, приведенных ниже, вариантов для перебора довольно много, и мы обойдемся без него. Напоминаем, что в задачах идет речь о рыцарях, которые всегда говорят правду, и о лжецах, которые всегда лгут . Если в задачах есть другие персонажи, то об их поведении в плане правда—ложь обязательно сказано. Решения с помощью рассуждений в задачах о рыцарях и лжецах сводятся к тому, чтобы выстроить логическую цепочку, которая отсечет все невозможные варианты и в результате останутся только варианты верные.

Пример 1. На острове рыцарей и лжецов собрались 12 местных жителей. Первый сказал: «Среди нас нет рыцарей». Второй сказал: «Среди нас не более одного рыцаря». Третий сказал, что рыцарей не более двух, четвертый — что не более трех, и так далее до двенадцатого, который сказал, что рыцарей среди них не более 11. Сколько было рыцарей?

Решение. Почему для нас здесь нехорош перебор? У нас 12 человек, каждый может быть изначально и рыцарем, и лжецом, всего 2^{12}=4096 ситуаций, это много. Можно еще перебирать по количеству рыцарей — от 0 до 12 — и это 13 вариантов, что тоже многовато. Сделаем по-другому — порассуждаем. Посмотрим на первого жителя. Если бы первый был рыцарем, то он сказал бы правду, и тогда все были бы лжецами, в том числе и он сам. Это явное противоречие, значит, такого быть не может, и первый — лжец. Тогда 12-й прав в любом случае, значит, он рыцарь. Если бы второй был рыцарем, то он должен был бы сказать правду, и все с 1-го до 11-го были бы лжецами (потому что 12-й — рыцарь), в том числе и он сам. Значит, второй — не рыцарь, а лжец. Тогда 11-й точно прав, значит, он — рыцарь. Рассуждая далее аналогично, получим, что все с 1-го до 6-го лжецы, а все с 7-го до 12-го — рыцари. Значит, рыцарей было 6.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Десять человек выстроены в шеренгу. Каждый из них либо рыцарь, либо лжец. Каждый сказал: «Справа от меня по крайней мере три лжеца». Сколько лжецов в этой шеренге?

Задача 2. В круг встали несколько индейцев и бледнолицых. У них принято лгать своим и говорить правду людям с другим цветом кожи. Каждый повернулся к своему соседу справа и сказал ему одну фразу. Прозвучало 8 фраз «Ты индеец!» и 9 — «Ты бледнолицый!». Сколько было индейцев и сколько бледнолицых?

Задача 3. Собрались вместе 100 рыцарей и лжецов и каждый сказал: «Все, кроме меня, — лжецы». Сколько среди них рыцарей?

Задача 4. Каждый житель острова рыцарей и лжецов заявил: «Среди оставшихся жителей острова более половины — лжецы». Сколько лжецов на острове, если известно, что всего на острове 21 человек?

Задача 5. Каждый житель острова рыцарей и лжецов поклоняется одному из трех богов — богу Воды, богу Огня или богу Земли . Каждому островитянину задали три вопроса: 1) Поклоняешься ли ты богу Воды? 2) Поклоняешься ли ты богу Огня? 3) Поклоняешься ли ты богу Земли? На первый вопрос утвердительно ответили 600 жителей, на второй — 400 жителей и на третий — 300 жителей. Известно, что на острове проживает 1000 человек. Сколько среди них лжецов?

Задача 6. Некоторые жители острова рыцарей и лжецов сказали, что на острове четное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечетное число лжецов. Кто из них прав?

Задача 7. На острове рыцарей и лжецов проживают 1234 человека. Однажды все жители острова разбились на пары, и каждый про своего соседа по паре сказал: «Он рыцарь!» либо «Он лжец!». Могло ли в итоге оказаться, что тех и других фраз произнесено поровну?

Задача 8. В комнате стоят 20 стульев двух цветов: синего и красного. На каждый из стульев сел либо рыцарь, либо лжец. Каждый из сидящих заявил, что он сидит на синем стуле. Затем они как-то пересели, после чего половина из сидящих сказали, что сидят на синих стульях, а остальные сказали, что сидят на красных. Сколько рыцарей теперь сидит на красных стульях?

ПРИНЦИП УЗКИХ МЕСТ (ПРИНЦИП КРАЙНЕГО)

Прежде чем формулировать и решать задачи на «принцип узких мест», поговорим о том, что вообще такое «узкое место». Точного определения у этого понятия нет, но представление о том, что это такое, составить все же можно.

Иллюстрация 1. Есть такая поговорка — «Где тонко, там и рвется». Веревка на картинке справа порвется там, где от нее осталась практически тонкая ниточка. Здесь узкое место, если иметь в виду прочность веревки, как раз эта ниточка.

Иллюстрация 2. Группа из нескольких человек собирается переправиться через ручей по переброшенной через него доске. Узкое место здесь, например, соотношение прочности доски и вес самого тяжелого участника. Если доска хлипкая и тонкая, а переправляется тяжелый человек, то доска может сломаться и переправа на этом закончится.

Иллюстрация 3. Предположим, у группы спелеологов есть выбор — идти по длинному маршруту или по короткому. Особенность короткого маршрута — узкий лаз. Здесь проблема понятна — пролезет ли самый толстенький участник через этот лаз. Именно это сразу и определит — двигаться коротким путем или длинным.

Получается, что «узкое место», «крайнее» в какой-то ситуации, — это особенность, от «размера» или «характера» которой существенно зависит ход дальнейших событий. Потому, если мы это «узкое место» найдем и поймем, как оно влияет на остальное, то, скорее всего, разберемся и с решением задачи.

Во многих задачах суть решения как раз и состоит в том, чтобы найти это «узкое место» и от него «раскрутить» ситуацию, построить логическую цепочку, ведущую к ответу. Выделение принципа «узких мест» в самостоятельную тему полезно тем, что это помогает детям находить такие узкие места и систематизировать подход к их поиску.

Пример 1. Выпишите натуральные числа от 1 до 10 в строчку так, чтобы соседние числа отличались бы не меньше, чем на 5.

Решение. Давайте подготовимся к расстановке — посмотрим, какие соседи могут быть у каждого числа. Для числа 1 это 6, 7, 8, 9 и 10. Для 2 — 7, 8, 9,10 и так далее. Получится так:

1 — 6, 7, 8, 9, 10
2 — 7, 8, 9, 10
3 — 8, 9, 10
4 — 9, 10
5- 10
6 — 1
7 — 1, 2
8 — 1, 2, 3
9 — 1, 2, 3, 4
10 — 1, 2, 3, 4, 5

Видно, что для чисел 5 и 6 меньше всего «свободы» в выборе соседних чисел — рядом с каждым из них может стоять только одно число. Это и оказывается «узким местом» в задаче. У каждого числа, которое стоит не с краю, есть по бокам два числа — справа и слева, а у тех, что с краю — только по одному соседу. Это означает, что 5 и 6 должны стоять по краям. При этом рядом с 5 стоит единственный возможный сосед — 10, а рядом с 6 — 1. Значит, нашу расстановку мы уже частично нашли: 5 10 _ _ _ _ _ _ 16 (или же наоборот: 6 — крайняя левая, 5 — крайняя правая). С числами 5, 10, 6 и 1 мы разобрались.

Теперь наименее «свободные» числа 4 и 7 — у них всего по 2 возможных соседних числа. Рассмотрим число 4. Оно может стоять только между 9 и 10, причем место для 10 уже определено — справа от 5. Значит, 4 стоит справа от 10, а после 4 сразу стоит 9. Рассуждая так же про 7, заполним дальше нашу расстановку. Получится так: 5 10 4 9 _ _ 2 7 1 6. Осталось поттавить в серединку 3 и 8 — тут уже можно обойтись без рассуждений, и так видно. Окончательный вид нашей расстановки получился такой:

5 10 4 9 3 8 2 7 1 6.

Замечание. Задачу, конечно, можно попытаться решить перебором. Количество вариантов расстановки 10 разных чисел по 10 местам равно 3 628 800 (сейчас не будем обсуждать, почему это так). Если рассматривать один вариант в минуту и при этом не есть и не спать, то перебор всех вариантов займет почти семь лет. Это, во-первых, слишком долго. Во-вторых, если бы в задаче числа были бы не от 1 до 10, а, скажем, от 1 до 1000, то перебор был бы просто в принципе неосуществим из-за времени. Поэтому по пути перебора мы не пойдем. Заметим, кстати, что при обсуждении — заниматься в этой задаче перебором или нет, узким местом оказалось время на перебор — именно из-за больших временных затрат мы и отказались от перебора.

Пример 2. Семья ночью подошла к мосту. Папа может перейти его за 1 минуту, мама — за 2, малыш — за 5, а бабушка — за 10 минут. У них есть один фонарик. Мост выдерживает только двоих. Как им перейти мост за 17 минут? (Если переходят двое, то они идут с меньшей из их скоростей. Двигаться по мосту без фонарика нельзя. Светить издали нельзя. Носить друг друга на руках нельзя. Передавать фонарик можно только из рук в руки.)

Решение. «Узкое» место здесь, видимо, бабушка и малыш — они переходят через мост существенно медленнее, чем мама и папа. Если они будут переходить мост по отдельности, это уже займет 10+5=15 минут и за 17 минут переправиться всем уже не успеть. Давайте отправим бабушку и малыша вместе переходить через мост, у них это займет 10 минут.

Теперь определимся — а на каком этапе они переправляются — первыми, последними или где-то в середине? Предположим, бабушка и малыш идут первыми. Когда они перейдут, останется всего 7 минут на переправу остальных. Фонарь сейчас у бабушки и малыша — кто-то из них должен отнести фонарь обратно — маме и папе, да еще и вернуться обратно — мы явно не успеваем. Значит, первыми малыша и бабушку отправлять нельзя. Могут ли они идти последними? Тоже нет, так как кто-то должен был принести им фонарь, и тот, кто его принес, остался на берегу, с которого они ушли. Значит, бабушка и малыш идут в середине. Теперь получается такая схема:

1. Мама и папа переходят на другой берег — это 2 минуты.
2. Папа идет обратно с фонариком, это одна минута, а всего от начала переправы — 3 минуты.
3. Переходят малыш и бабушка — это 10 минут, от начала переправы 13 минут.
4. Мама идет к папе — это 2 минуты, от начала переправы 15 минут.
5. Мама и папа переходят мост — это 2 минуты, от начала переправы 17 минут.

ЗАДАЧИ

Задача 1. В пустой комнате большой футбольный мяч гоняется за маленьким мячиком от настольного тенниса и хочет его раздавить. Как спастись маленькому мячику?

Задача 2. Петя купил «Конструктор», в котором было 100 палочек разной длины. В инструкции к «Конструктору» написано, что из любых трех палочек «Конструктора» можно составить треугольник. Петя решил проверить это утверждение, составляя из палочек треугольники. Палочки лежат в конструкторе по возрастанию длин. За сколько проверок (самое меньшее) Петя сможет доказать или опровергнуть утверждение инструкции? Напоминаем, что если есть три отрезка и длина каждого из них меньше сумм длин двух других, то из этих отрезков можно составить треугольник, если же это условие нарушено, то нельзя.

Задача 3. На крыше в ряд сидят 6 котов. Между Пушком и Мурзиком сидит Кузя и еще один кот. Между Рыжиком и Кузей сидит Барсик и еще один кот. Между Барсиком и Васькой сидит Пушок и еще один кот. Как сидят коты, если Васька не крайний?

Задача 4. Возможно ли замостить доску 8х8 «доминошками» так, чтобы никакие две доминошки не образовывали квадрат 2х2?

Задача 5. Семь астрономов на семи разных планетах наблюдают друг за другом, причем каждый наблюдает за ближайшим к нему астрономом (среди расстояний между планетами нет одинаковых). Докажите, что хотя бы за одним астрономом никто не наблюдает.

Задача 6. Восемь грибников собрали 37 грибов. Известно, что никакие двое не собрали грибов поровну и каждый нашел хотя бы один гриб. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.

Задача 7. На клетчатой доске расставлено несколько шахматных ладей. Докажите, что найдется ладья, которая бьет не более двух других ладей.

Задача 8. Можно ли расставить в ряд числа от 1 до 10 (каждое число используется один раз) так, чтобы сумма любых трех подряд была бы не больше 15?

МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ, РАССТАНОВКИ

В задачах этого раздела надо расставить числа в таблице, строке, по кругу или в какой-то другой структуре так, чтобы эта расстановка подчинялась определенным правилам. На полный перебор эти задачи не рассчитаны, все направлено на то, что решающий заметит что-то, что существенно облегчит ему решение. В силу этого «заметит что-то» задачи этого раздела, вообще говоря, относятся к теме «узкое место», но в силу некоторой специфики мы их все же рассмотрим отдельно. Приведем примеры.

Пример 1 (Судоку). В пустые клетки таблички впишите цифры 1, 2, 3 и 4 так, чтобы они были в каждом столбце, в каждой строке и в каждом из четырех выделенных маленьких квадратиков 2х2.

3	4	1	
	2		
		2	
	1	4	3

Решение. Здесь можно много чего заметить сразу. Решать можно, например, так: если посмотреть на верхнюю строку, то сразу видно, что в правом верхнем углу стоит 2. В нижней тоже строке легко определяется самое левое число — это опять 2. Впишем их (второй рисунок).

3	4	1	2
	2		
		2	
2	1	4	3

Во втором слева столбце не хватает 3, в третьем слева столбце не хватает тоже 3. В правом нижнем квадратике нету 1, в левом верхнем не хватает также 1. Внесем их. Остались две свободные клетки — там, очевидно, стоят две цифры 4.

3	4	1	2
1	2	3	4
4	3	2	1
2	1	4	3

Пример 2. Расставьте в серые клетки числа от 1 до 12 (каждое по одному разу) так, чтобы суммы чисел в верхней строке, нижней строке, правом столбце и левом столбце были одинаковы и равны 22.

Решение. Сумма чисел от 1 до 12 равна 78. Если же мы сложим суммы чисел в верхней строке, нижней строке, правом столбце и левом столбце, то получим 88. Разница в 88-78=10 получилась из-за того, что во втором случае угловые клетки были посчитаны дважды. Значит, сумма чисел в угловых клетках равна 10. Такую сумму могут дать только числа 1, 2, 3 и 4 — значит, они и находятся в углах. Вариантов дальнейшей расстановки несколько, и найти хоть какой-нибудь из них уже несложно. Например, он может быть таким, как на картинке.

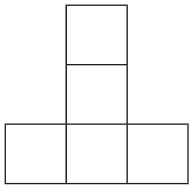
1	6	11	4
7			5
12			10
2	8	9	3

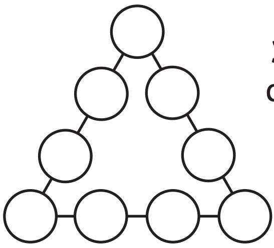
ЗАДАЧИ

Задача 1. Расставьте числа в полоске так, чтобы сумма любых трех подряд идущих чисел равнялась 15.

		6										4		

Задача 2. Расставьте числа 1, 2, 3, 4, 5 в клеточках так, чтобы сумма чисел и в столбце, и в строчке была бы равна 9.

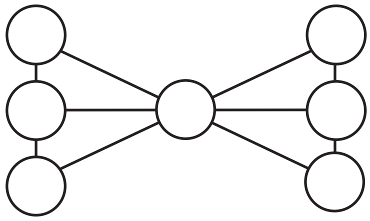




Задача 3. Расставьте числа 1, 2, 3, ..., 9 в кружочках так, чтобы сумма чисел на каждой стороне треугольника равнялась 17.

Задача 4. На двух пересекающихся окружностях отметили 8 точек так, что на каждой окружности получилось 5 точек. Расставьте в этих точках числа от 1 до 8 так, чтобы сумма чисел на одной окружности и на другой равнялась 25.

Задача 5. Расставьте числа от 1 до 7 так, чтобы сумма трех чисел на каждой прямой была одинаковой.

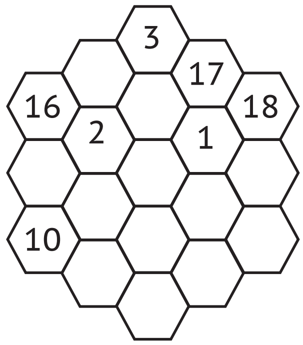


	9	
15		7

Задача 6. Магический квадрат — это квадрат, в котором суммы цифр в каждой строке, в каждом столбце и на обоих диагоналях равны. Расставьте недостающие числа так, чтобы квадрат стал магическим.

Задача 7. Составьте магический квадрат из чисел 1, 2, ..., 9.

Задача 8. Заполните свободные клетки «шестиугольника» числами от 1 до 19 так, чтобы во всех вертикальных и диагональных рядах сумма чисел, стоящих в одном ряду, была бы одна и та же.



ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

Это, видимо, одна из наиболее сложных тем для ребят. Во-первых, потому что решение предполагает доказательство, а, во-вторых, доказывать надо «от противного».

Дадим представление о том, что такое «доказательство от противного» и чем оно может быть полезно, — приведем пару примеров.

Пример 1 — жизненный. Допустим, Ваня и его папа уехали на дачу, а мама осталась в городе. Дождливым вечером Ваня сидит в своей комнате на даче и читает книжку, тут звонит мама и интересуется, где папа, — ей не дозвониться, потому что у того разрядился телефон. А узнать она хочет, где сейчас папа, — у соседа тракториста Никиты или в лесу в избушке у лесника Петра — к кому-то из них он собирался вечером зайти. Она предполагает, что у лесника Петра, и просит проверить — права ли она. Ваня может напрямую проверить, права ли мама, — ему придется вечером под дождем идти через темный лес. Однако есть и другой путь — предположить «противное» — то, что мама не права, — быстро дойти до дома тракториста Никиты и посмотреть, там ли папа. Если он там, то мама ошиблась, а если его там нет, то мама права. Ваня, видимо, изберет второй путь, так как он существенно проще.

Пример 2. Дед Мазай спас 14 зайцев и принес их домой. Дома у него есть три клетки. Дед думает, как бы разместить всех зайцев по клеткам. Правда ли, что при любом размещении в какой-то клетке окажется более четырех (т.е. хотя бы пять) зайцев? У нас, как и в примере 1, есть как минимум два пути узнать, так это или не так.

Путь 1 (напрямую). Мы можем перебирать варианты размещения зайцев по клеткам. Возможно, найдется вариант, при котором в каждой клетке зайцев четыре или меньше, и тогда то, о чем нас спрашивают, неправда. Если же при всех возможных размещениях найдется клетка, в которой четыре или больше зайцев, то тогда то, о чем нас спрашивают, — правда. Неприятность при переборе в том, что для утвердительного ответа нам придется (в худшем случае) рассмотреть все возможные размещения, а их немало. Более того — если бы зайцев и клеток было в 10 раз больше, то перебор был бы практически неосуществим. Получается, что прямой перебор, конечно, путь, но это плохой путь.

Путь 2 (от противного). Возможных ответов в этой задаче всего два — «Да, это правда» и «Нет, это неправда». Предположим, что ответ в задаче — «Нет, это неправда», то есть утверждение, как говорят, «противное» предположению в вопросе задачи. Это означает, что удалось найти такое размещение, при котором в каждой клетке будет менее пяти зайцев — то есть четыре или меньше. Но тогда во всех трех клетках зайцев не более, чем $4 \times 3 = 12$. По условию же у нас 14 зайцев. Получается явное противоречие.

Противоречие появилось от того, что мы сказали: «предположим, что ответ в задаче «нет, это не правда». Значит, предположение неверное. Тогда ответ в задаче — «Да, это правда». Второй путь оказался явно короче, чем первый. Более того, такие же рассуждения позволят быстро решить задачу и в том случае, когда зайцев и клеток, например, в 10 раз больше.

Наиболее простая формулировка принципа Дирихле звучит так:

Если в N клетках находятся N+1 или более зайцев, то найдется клетка, в которой сидят не менее двух зайцев.

Доказательство (также от противного): пусть принцип Дирихле не верен. Тогда можно разместить зайцев так, что в каждой клетке не более одного зайца. Так как в каждой клетке будет не более одного зайца, а клеток всего N, то и зайцев всего не более, чем N. Однако зайцев по условию N+1 или больше, получаем явное противоречие. А возникло оно из-за того, что мы предположили, что принцип Дирихле неверен. Значит, наше предположение ошибочно, и верность принципа Дирихле тем самым доказана.

Более общая формулировка принципа Дирихле:

Если $k \times n + r$ ($r > 0$) зайцев размещено в к клеток, то по крайней мере в одной из клеток сидит не меньше, чем $n+1$ зайцев.

Пример 2 — иллюстрация к этой формулировке. Здесь $k=3$, $n=4$, $r=2$ ($14=3\times4+2$). Доказательство общей формулировки проводится так же, как и доказательство этого частного случая (только с «буквами»).

Применение принципа Дирихле

Задачи, решение которых предполагает использование этого принципа, можно решать по-разному:

1. Ссылаться на принцип Дирихле, выбирая подходящих «зайцев» и соответствующие «клетки».
2. Проводить рассуждения, аналогичные рассуждениям в примере 2 — от противного, — то есть в духе доказательства принципа Дирихле.

Приведем еще пару примеров.

Пример 3. В классе 13 человек. Правда ли, что среди них найдутся хотя бы два ученика, родившихся в одном месяце?

Решение 1 (ссылка на принцип Дирихле). Пусть номер месяца — это номер клетки, а ученики — зайцы. Каждого зайца сажаем в клетку, номер которой равен номеру месяца рождения соответствующего ученика. Значит, нам надо 13 зайцев разместить по 12 клеткам. По принципу Дирихле в какой-то клетке окажется не менее 2 зайцев. Это означает, что хотя бы 2 ученика родились в один и тот же месяц.

Решение 2 (в духе принципа Дирихле — рассуждение «от противного»). Предположим, что нет двух учеников, родившихся в одном месяце. Тогда в каждом месяце день рождения у одного ученика или вообще ни у кого.

Так как месяцев всего 12, то учеников вместе будет не более, чем 12. Однако по условию у нас 13 учеников, что противоречит тому, что учеников не более 12. Противоречие же получилось из-за того, что мы предположили, что нет двух учеников, родившихся в одном месяце. Значит, предположение неверно и найдется месяц, в котором родились хотя бы два ученика.

Пример 4. В классе 15 человек. В диктанте Федя сделал 5 ошибок, а остальные меньше (отсутствие ошибок мы понимаем как ноль ошибок). Докажите, что по крайней мере 3 ученика сделали ошибок поровну.

Решение 1 (ссылка на принцип Дирихле). Пусть число ошибок — это номер клетки, а ученики — зайцы. Клетка номер ноль — для тех учеников, которые вообще не сделали ошибок. Клетка номер один — для тех, кто сделал ровно одну ошибку, и т. д. Все ученики, кроме Феди, сделали от 0 до 4 ошибок, значит, номера клеток для этих 14 человек — от 0 до 4 и, значит, клеток для них всего 5 штук. Таким образом, мы рассаживаем 14 зайцев по 5 клеткам. Так как $14=5\times2+4$, то по принципу Дирихле мы получаем, что в какой-то клетке не менее, чем три зайца. Что, собственно, и означает, что найдется не менее трех учеников, совершивших одинаковое число ошибок.

Решение 2 (в духе принципа Дирихле). Предположим противное — пусть каждое из пяти возможных количеств ошибок (0, 1, 2… 4) сделали не более, чем два ученика. Тогда нулю ошибок соответствует не более двух учеников, одной — не более двух и так далее. Значит, учеников не более, чем $6\times2=12$ человек. Это вступает в противоречие с тем, что в классе кроме Феди 14 человек. Значит, наше предположение неверно и, следовательно, хотя бы три ученика сделали одинаковое количество ошибок.

ЗАДАЧИ

Задача 1. В школе 800 учеников. Докажите, что хотя бы трое из них родились в один день года.

Задача 2. Каждый из 10 участников переговоров послал по их окончании поздравительные открытки пятерым другим участникам. Докажите, что какие-то двое послали открытки друг другу.

Задача 3. В таблице 3x3 случайным образом расставлены числа 0, 1, 2. Посчитаем отдельно суммы чисел в каждой строке, в каждом столбце и по каждой из двух диагоналей. Докажите, что хотя бы две суммы совпадут.

Задача 4. На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьет какого-нибудь другого ферзя.

Задача 5. В ковре размером 4x4 метра моль проела 15 дырок. Всегда ли можно вырезать коврик размером 1x1, не содержащий внутри дырок? Дырки считаются точечными — то есть очень маленькими.

Задача 6. В коридоре 2x3 м разлили краску. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 м.

Задача 7. Даны 12 различных двузначных чисел. Докажите, что из них можно выбрать два числа, разность которых делится на 11.

Задача 8. В тетради в клеточку нарисовали (по линиям сетки) прямоугольник 5x6 и закрасили в нем 19 клеток. Докажите, что в этом прямоугольнике можно выбрать квадрат 2x2, в котором закрашено не менее трех клеток.

ПОДСЧЕТ ДВУМЯ СПОСОБАМИ

Метод состоит в том, что мы рассматриваем характеристику чего-то, фигурирующего в задаче, с разных позиций. Этой характеристикой могут быть число, форма, цвет и так далее. Взгляд с разных позиций может привести к уравнению, неравенствам, противоречиям и вообще к чему-то полезному для решения — говоря по-другому, мы так или иначе увязываем разные точки зрения в одно целое.

Приведем в качестве «гуманитарного» примера довольно известную историю:

Индийская притча о слепых и слоне.

В одном городе когда-то жили шестеро слепых. Как-то они услышали: «Эй, к нам пришел слон!» Слепые не имели ни малейшего представления о том, что такое слон, и как он может выглядеть. Они решили: «Раз мы не можем его увидеть, мы пойдем и хотя бы потрогаем его». «Слон — это колонна», — сказал первый слепой, потрогавший слоновью ногу. «Слон — это веревка», — сказал второй, схвативший его за хвост. «Да нет же! Это толстый сук дерева», — сказал третий, рука которого провела по хоботу. «Он похож на большое опахало», — сказал четвертый слепой, который взял животное за ухо. «Слон — это большая бочка», — сказал пятый слепой, пощупав живот. «Он больше похож на курительную трубку», — заключил шестой слепой, проведя по бивню. Завязался спор, поскольку каждый слепой считал свое описание слона правильным. Раджа, разбуженный шумом, вышел на балкон. «Слон — это большое животное», — сказал он. — «Каждый из вас прикоснулся лишь к одной его части. Вам придется сложить все части вместе, чтобы узнать, на что похож слон». Просветленные мудростью раджи, слепые пришли к согласию: «Каждый из нас знает только часть истины. Чтобы найти истину целиком, мы должны сложить все части вместе».

Пример 1. Можно ли расставить натуральные числа в таблице 3х4 (3 строки и 4 столбца) так, чтобы сумма чисел в каждой строке была равна 7, а в каждом столбце — 5?

Решение. Самое естественное — попробовать сразу расставить числа. Через некоторое время окажется, однако, что расставить числа «не получается». Это означает либо то, что расстановка какая-то очень сложная, либо то, что она в принципе невозможна.

Предположим, что расставить числа все же удастся. Подсчитаем сумму всех чисел, записанных в таблице, двумя способами — сначала по строкам, а потом по столбцам. Так как для сложения порядок слагаемых не важен, то результаты должны совпасть. Сначала найдем сумму, используя наши знания о строках. Строк — три, сумма в каждой строке — 7, значит, с точки зрения строк, сумма чисел в таблице должна быть равна $3\times7=21$. Теперь подсчитаем сумму, используя наши знания о столбцах. Столбцов — 4, сумма в каждом столбце — 5, значит, с точки зрения столбцов, сумма чисел в таблице должна быть равна $4\times5=20$. Так как 21 не равно 20, то предположение, что числа расставить удастся, неверно. Значит, расстановка чисел невозможна.

Замечание. Эту задачу, как почти и всякую, можно решить несколькими способами. Давайте рассмотрим еще два варианта решения и объясним, почему в этой задаче мы не считаем хорошим выбором их использование.

1. Перебор. Попытка решения перебором приведет к тому, что нам придется перебрать более тысячи вариантов. Заметим также что, если бы числа не были натуральными, то перебор был бы просто невозможен.

2. Решение системой уравнений. Обозначим числа в таблице буквами. Запишем условие в виде системы уравнений. Получится 7 уравнений и 12 неизвестных. Это явно не для младших школьников, да и трудоемко.

Пример 2. В океане есть остров. На острове 7 озер, из каждого вытекает 4 реки и в каждое впадает две реки. Реки вытекают только из озер и впадают только в озера или в океан. Сколько рек впадает в океан?

Решение. Посмотрим на количество рек с двух сторон — с точки зрения истоков и с точки зрения устьев. Так как из каждого из семи озер вытекает по четыре реки, то всего рек $4\times7=28$. Теперь посмотрим с точки зрения устьев. Каждое из озер содержит по 2 устья, значит, в озера впадают $2\times7=14$ рек. В океан, соответственно, впадают $28-14=14$ рек.

ЗАДАЧИ

Задача 1. В прямоугольной таблице 8 столбцов, сумма в каждом столбце равна 10, а в каждой строке — 20. Сколько в таблице строк?

Задача 2. Наташа и Инна купили по одинаковой коробке чая в пакетиках. Известно, что одного пакетика хватает на две или три чашки чая. Этой коробки Наташе хватало на 41 чашку чая, а Инне — на 58. Сколько пакетиков было в коробке?

Задача 3. Рита, Люба и Варя решали задачи. Чтобы дело шло быстрее, они купили конфет и условились, что за каждую решенную задачу девочка, решившая ее первой, получает четыре конфеты, решившая второй — две, а решившая последней — одну. Одновременных решений не было. Каждая девочка говорит, что решила все задачи и получила 20 конфет. Не ошибся ли кто-то из девочек?

Задача 4. В классе 27 человек. Каждый мальчик дружит с четырьмя девочками, а каждая девочка с пятью мальчиками. Сколько в классе мальчиков и сколько девочек?

Задача 5. На кошачью выставку пришло 100 посетителей. Оказалось, что каждый посетитель погладил ровно трех кошек и каждую кошку погладили ровно три посетителя. Сколько было кошек на выставке?

Задача 6. На кошачьей выставке в ряд сидят 10 котов и 19 кошек, причем рядом с каждой кошкой сидит кот, который ее толще. Докажите, что рядом с каждым котом сидит кошка, более худая, чем этот кот.

Задача 7. Четыре девочки — Катя, Лена, Маша и Нина — участвовали в концерте. Они пели песни. Каждую песню исполняли три девочки. Катя спела 8 песен — больше, чем каждая из остальных, а Лена — 5 песен — меньше, чем каждая из остальных девочек. Сколько песен было спето?

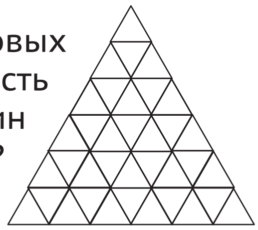
Задача 8. Футбольный мяч сшит из 32 лоскутов: белых шестиугольников и черных пятиугольников. Каждый черный лоскут граничит с пятью белыми, а каждый белый — с тремя черными и тремя белыми. Сколько лоскутов имеют белый цвет?

ОЦЕНКА + ПРИМЕР

Оценка+пример — это специальное рассуждение, которое применяется в некоторых задачах на нахождение наибольших или наименьших значений. Это выглядит примерно так: мы решаем задачу, в которой надо найти наименьшее значение чего-нибудь. Из каких-либо соображений мы понимаем, что ответ — натуральное число и каким-то образом умеем обосновывать, что он, скажем, не менее, чем 20. Значит, ответ либо 20, либо больше. Теперь мы проверяем, является ли 20 ответом. Либо нам удастся доказать, что 20 — это ответ, либо мы покажем, что 20 ответом быть не может. В первом случае задача решена, во втором мы повышаем оценку до 21 и продолжаем делать то же самое — либо доказываем, что 21 — это ответ, либо повышаем оценку до 22, и так далее, пока не дойдем до ответа. Сам процесс получения первоначальной оценки неформализуем — в каждой задаче будут какие-то свои соображения. Чаще в задачах придумать оценку труднее, чем сделать пример, но бывает, что и сам пример построить совсем не легко. Почти всегда есть смысл попытаться построить хоть какой-то пример, чтобы разобраться в ситуации и найти идеи для обоснования оценки.

Пример 1. Каким наименьшим числом монет по 3 и 5 копеек можно набрать 37 копеек?

Решение. Если число монет не превосходит семи, то сумма окажется не более $7\times5=35$ копеек. Значит, семи и менее монет нам не хватит. Следовательно, монет должно быть не менее, чем восемь, — это наша оценка числа монет на данный момент. Однако восемь нечетных чисел (у нас номинал 3 и 5) в сумме дают четное число. Значит, восемью монетами набрать 37 копеек также не получается. Итак, монет должно быть не менее девяти, девять — наша новая оценка. Приведем пример подходящего набора из девяти монет: пять пятикопеечных и четыре трехкопеечных дают вместе как раз 37 копеек. Следовательно, наименьшее возможное число монет равно девяти.



Пример 2. Замок имеет форму треугольника, разбитого на 36 одинаковых треугольных залов. В стене между любыми двумя соседними залами есть дверь. Путник хочет обойти как можно больше залов, не заходя в один зал дважды. Какое наибольшее количество залов ему удастся посетить?

Решение. Покрасим залы в два цвета так, чтобы не было двух одноцветных рядом — так, как на рисунке. Мы получим 21 темный зал и 15 светлых. Так как на каждом шаге мы попадаем либо из темного зала в светлый, либо наоборот, то на нашем пути будет либо поровну залов каждого цвета, либо какого-то цвета на 1 больше. Значит, мы не можем посетить больше, чем 16+15=31 зал. То, что мы сейчас получили, — 31 зал — пока не является ответом к задаче. Это только оценка — мы установили, что более, чем 31 зал, мы посетить не сможем. Если удастся привести пример пути для 31 зала, то это завершит решение и число 31 станет ответом на задачу. Теперь убедимся, что 31 — это ответ: приведем пример пути, пройдя который, мы посетим 31 зал. Такой путь показан на картинке.

Таким образом, метод «Оценка+пример» состоит в следующем:

1) мы находим оценку величины, о которой нас спрашивают в задаче;

2) пытаемся привести пример, соответствующий условиям задачи, в которой достигается значение оценки;

3) если удается привести пример, то задача решена, если нет, доказываем, что пример при данной оценке привести нельзя и, значит, нужно пересмотреть оценку, и снова переходим к пункту 2.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Том Сойер взялся покрасить очень длинный забор, соблюдая условие: любые две доски, между которыми ровно две, ровно три или ровно пять досок, должны быть окрашены в разные цвета. Какое наименьшее количество красок потребуется Тому для этой работы?

Задача 2. Катя решила поджарить котлеты. На сковороду помещается одновременно 4 котлеты. Одна сторона котлеты жарится 5 минут. Кате надо поджарить 6 котлет. За какое минимальное время и как она это может сделать?

Задача 3. Обезьяна становится счастливой, когда съедает три разных фрукта. Какое наибольшее количество обезьян можно осчастливить, имея 20 груш, 30 бананов, 40 персиков и 50 мандаринов?

Задача 4. В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 учеников, во вторник — 4, в среду — 6, в четверг — 2, в пятницу — 5. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

Задача 5. Новогодняя гирлянда, висящая вдоль школьного коридора, состоит из красных и синих лампочек. Рядом с каждой красной лампочкой обязательно есть синяя. Какое наибольшее количество красных лампочек может быть в этой гирлянде, если всего лампочек 50?

Задача 6. В Изумрудном городе живет 14 ювелиров. Они работают в разнообразных мастерских. В каждой мастерской должны работать не менее чем 3 ювелира. Кроме того, в двух мастерских не может работать полностью одинаковый состав. При этом каждый ювелир может работать не более, чем в двух мастерских. Какое наибольшее число мастерских может быть в Изумрудном городе?

Задача 7. Какое наибольшее число прямоугольников 1x4 можно вырезать из доски 10x10?

Задача 8. Хозяйка испекла для гостей пирог. К ней может прийти либо 10, либо 11 человек. На какое наименьшее число кусков ей нужно заранее разрезать пирог так, чтобы его можно было поделить поровну как между 10, так и между 11 гостями?

ПУТЬ И СКОРОСТЬ

В этих задачах решение основано на понимании процесса, на удачном рисунке, который позволяет почти сразу понять связь неизвестных величин с известными. Это позволяет избежать громоздких формул и вычислений, которые появились бы при решении «в лоб». Приведем пример, довольно знаменитый.

Пример 1. Два поезда находятся на расстоянии 200 км друг от друга. В какой-то момент они начинают движение навстречу со скоростью 50 км/ч каждый. С ветрового стекла одного локомотива в начальный момент движения взлетает муха и принимается летать со скоростью 75 км/ч вперед и назад между поездами, пока те не встретятся. Какое расстояние успеет пролететь муха до момента встречи?

Сложное решение. Что первое приходит в голову — с каждым из поездов муха успевает повстречаться бесконечно много раз. Чтобы найти расстояние, которое муха преодолела в полете, нужно просуммировать бесконечный ряд расстояний. Нетрудно найти момент первой встречи, потом второй, потом третьей, постаравшись вывести общую формулу для общего члена ряда и потом, еще постаравшись, найти сумму ряда. Мало того, что в таком виде это практически нереализуемо для школьников, это еще и далеко не лучшее решение.

Простое решение. Поскольку в начальный момент расстояние между поездами равно 200 км, а каждый поезд движется со скоростью 50 км/ч, то поезда встретятся через два часа. Все эти 2 ч муха находится в полете. Поскольку она развивает скорость 75 км/ч, то за эти два часа она пролетит 150 км.

В задачах этого раздела нас как раз интересуют «простые» решения. Приведем еще пару примеров.

Пример 2. Пассажир опаздывал на поезд, и ему нужно было пробежать весь путь со скоростью 10 км/ч. Но у него были тяжелые сумки, и всю первую половину пути он плелся со скоростью 5 км/ч. Как раз на половине пути его встретил друг на машине и предложил подвезти. Есть ли у них шанс успеть на поезд, и если да, то с какой скоростью им нужно для этого ехать?

Решение. Пробежать весь путь со скоростью 10 км/ч займет столько же времени, что и пройти половину пути со скоростью 5 км/ч. Значит, в тот момент, когда пассажир встретил друга, поезд как раз отправился. Стало быть, шансов успеть на поезд нет.

Пример 3. Два мальчика одновременно прыгнули с плота и поплыли в разные стороны: один — по течению, второй — против течения реки. Скорость течения — 3 км/ч. Мальчики плавают без учета течения со скоростью 5 км/ч. Через 5 минут они одновременно повернули и поплыли обратно. Кто из них вернется на плот быстрее?

Решение. Опять же не станем сразу писать формулы. Представим себе небольшой фильм про этот заплыв при условии, что течения нет. Очевидно, что мальчики вернутся на плот одновременно. Что теперь надо сделать, чтоб посмотреть тот же фильм, но с течением? Надо просто ту картину, которая была, перемещать по экрану с той скоростью, с которой движется плот, чтобы в кадре он оставался на одном месте. Мальчики в новой версии, тоже, очевидно, приплывут обратно в одно и то же время. Так что ответ — они приплывут одновременно. Заметим, что при решении мы не использовали численные значения для течения и скорости мальчиков, так что мы заодно решили задачу в общем виде.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Турист вышел из дома в 9:15 и, пройдя 33 километра за 11 часов, вспомнил, что забыл выключить утюг. Он бросил все и побежал обратно домой той же дорогой в пять раз быстрее, чем шел туда. Когда он прибежит домой?

Задача 2. Между городами X и Y ходят автобусы с одинаковой постоянной скоростью. Автобус, выехавший из X в полдень, и автобус, выехавший из Y в 17:00, встретились на расстоянии 600 км от X. Автобус, выехавший из X в 15:00, и автобус, выехавший из Y в 10:00, встретились на расстоянии 400 км от X. На каком расстоянии от X встретятся автобусы, выехавшие из X и из Y в 14:00?

Задача 3. Удав длиной 16 метров проползает через мост длиной 32 метра за 18 минут. Сколько минут ему потребуется, чтобы проползти мимо столба?

Задача 4. На дороге, соединяющей два горных аула, нет горизонтальных участков. Автобус идет в гору со скоростью 15 км/ч, а под гору — со скоростью 30 км/ч. Найдите расстояние между аулами, если известно, что путь туда и обратно автобус проезжает за 6 часов.

Задача 5. Чтобы проплыть некоторое расстояние по течению, моторной лодке требуется в три раза меньше времени, чем на то, чтобы проплыть то же расстояние против течения. Во сколько раз скорость лодки в озере больше скорости плота, плывущего по течению?

Задача 6. В воскресенье монах ровно в 6 часов утра начал восхождение на гору и к вечеру добрался до вершины. Всю ночь монах медитировал, а в понедельник ровно в 6 часов утра вышел обратно по той же дороге. Докажите, что на этой дороге есть такое место, что в воскресенье и в понедельник монах оказывался там в одно и тоже время.

Задача 7. С двух неподвижных стартовых площадок запускаются две ракеты, которые с постоянными скоростями летят строго навстречу друг другу, сталкиваются и взрываются. За минуту до столкновения расстояние между ними равнялось 27 км, за 2 минуты до столкновения — 45 км, за 3 минуты — 57 км, за 4 минуты — 65 км. Каково было расстояние между ракетами за 5 минут до столкновения? Каковы были скорости ракет?

Задача 8. Есть очень узкий коридор (вдвоем рядом не пройти) с выходами в обоих концах. Длина коридора 100 метров. В нем стоят 50 человек. В какой-то момент все они начинают идти со скоростью 1 м/с — кто-то в направлении одного выхода, кто-то в направлении другого. Если человек доходит до одного из выходов, то он уходит и больше не возвращается. Если два человека сталкиваются, они мгновенно разворачиваются и идут в обратную сторону (потом либо опять сталкиваются и разворачиваются, либо, если дойдут без столкновений до выхода, то уходят). Через какое минимальное время в коридоре точно никого не останется?

ИНВАРИАНТ. ЧЕТНОСТЬ КАК ИНВАРИАНТ

Инвариант — термин, обозначающий нечто неизменное. Конкретное значение термина зависит от ситуации, в которой он используется:

Пример 1. Возьмем кусок красного пластилина. Вылепим из него зайца. Потом переделаем зайца в лису и положим в холодильник. Форма пластилина изменились, температура тоже, а масса — нет. Значит, масса в данном примере — инвариант. Инвариант может быть не один — еще инвариантом здесь является, например, цвет — пластилин все время будет красным.

Пример 2. Возьмем лист бумаги и нарисуем на нем отрезок длиной, скажем, 10 см. Теперь хорошенько скомкаем лист и выбросим в окно. Давайте посмотрим, что произошло с отрезком. Форма линии, которая была отрезком, поменялась, так как лист мы смяли. Поменялось положение этой линии в пространстве — кроме того, что смяли, еще и выбросили. А вот длина линии, понятно, не поменялась — она так и осталась равной 10 см. Значит, в этом примере длина линии — инвариант. Другие инварианты, например, — цвет и толщина линии.

Пример 3. Возьмем число 2 и прибавим к нему 4. Получится 6. Прибавим еще 4. Получится 10. Будем и дальше прибавлять по 4 к получившейся сумме на каждом шаге. Получится ряд чисел — 2, 6, 10, 14, 18 и так далее. На каждом шаге, как видно, у нас будет получаться четное число. Значит, то, что на каждом шаге мы получаем четное число, — инвариант этого процесса. Чуть менее очевидным инвариантом процесса будет то, что остаток от деления каждого числа на 4 будет равен двум.

Пример 4. Нарисуем 100 треугольников — все разные и разного цвета. Они могут иметь разный периметр, разную площадь, у них разный цвет, да и разное расположение на листе, на котором мы их нарисовали. А вот то, что у каждого треугольника три вершины, — инвариант для всех треугольников. То, что сумма всех углов равна 180 градусов (этого ребята еще не знают), — тоже инвариант.

В примерах 1 -3 у нас возникали инварианты при развитии какого-то процесса во времени (шаг за шагом) — здесь же у нас «статичная» ситуация, аналогом движения «шаг за шагом» выступает перебор треугольника за треугольником.

А как используется инвариант при решении задач? Дело в том, что, хотя это и непривычно звучит, во многих задачах или процессах не надо полностью разбираться в том, что происходит, до конца. Несущественные детали можно отбросить, сконцентрировав внимание на главном. Приведем пример из жизни. Допустим, нам надо добраться на трамвае из одного места в другое без пересадок. Пусть по нужному нам маршруту ходит только трамвай номер 25. Мы, понятное дело, приходим на остановку и ждем, когда же появится трамвай 25-го маршрута. Вообще у каждого трамвая много характеристик — когда он сделан на заводе, сколько вагонов, какого цвета, кто вагоновожатый и много чего еще можно придумать. Но нас здесь интересует только одно — номер маршрута. Маршрут для всех трамваев с номером 25 — инвариант — то есть при переходе от трамвая к трамваю эта характеристика не меняется. Собственно, за этим инвариантом при приближении очередного трамвая к остановке мы и смотрим — остальное нас не волнует.

Вот так и с задачами — надо понять, что важно, и с этим важным и разбираться. Правила, как найти инвариант в той или иной задаче, и вообще, решается ли задача через нахождение инварианта, нет, здесь поможет только опыт.

Наиболее часто встречающийся в задачах инвариант — четность. Порешаем задачи на такой инвариант.

Пример 1. Десять фишек с номерами от 1 до 10 по порядку номеров выставлены в ряд. Разрешено менять местами две фишки, стоящие через одну. Можно ли с помощью таких операций переставить все фишки в обратном порядке?

Решение. Перенумеруем места, на которых стоят фишки, числами от 1 до 10. После каждой перестановки номер места, на котором оказалась фишка, либо не изменился (для тех, которые мы не трогали), либо изменился на 2. Например, поменяем местами фишки, стоящие на 5-м и 7-м местах. Та, которая была на 5-м месте, окажется на 7-м, а 7-я — на 5-м. Остальные фишки останутся там, где стояли до перестановки. Значит, фишки с четными номерами могут оказаться только на четных местах, а фишки с нечетными — на нечетных. Это и есть инвариант — сохранение одинаковой четности номера фишки и места, на котором она стоит. Фишка с номером 1, таким образом, всегда, как бы мы не осуществляли перестановки, будет на нечетном месте. Значит, она никогда не сможет попасть на место с номером 10. Значит, переставить фишки в обратном порядке не получится.

В примере 1 «увидеть» инвариант было достаточно просто — надо было проследить, как изменяется номер места, занимаемого фишкой. В задачах посложнее инвариант менее очевиден, его надо «сконструировать» (т. е. придумать).

Пример 2. На доске написаны шесть чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6. За один ход разрешается к любым двум из них одновременно добавлять по единице. Можно ли за несколько ходов все числа сделать равными?

Решение. Немного поэкспериментировав, мы увидим, что сделать числа одинаковыми не получается. Покажем, что это не мы плохо стараемся, а что сделать числа равными вообще невозможно. Будем следить за суммой написанных чисел (как раз это и есть «придумка»). Сначала сумма чисел равна 1+2+3+4+5+6, это 21. Заметим, что 21 — нечетное число. За каждый ход эта сумма увеличивается на 2, т.е. всегда остается нечетной. Таким образом, инвариант в данной задаче — то, что сумма всех чисел на каждом шаге нечетна. А если бы мы смогли сделать все числа равными, то сумма должна была бы стать четной, так как это была бы сумма шести одинаковых чисел. Это значит, что сделать числа равными нельзя.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Дядька Черномор написал на листке бумаги число 20 и отдал этот листок одному из богатырей. Тридцать три богатыря передают листок друг другу. Каждый или прибавляет к числу или отнимает от него единицу и передает листок следующему. Может ли число, получившееся после 33-го богатыря, оказаться равным 10?

Задача 2. На доске написано слово «СПАНИЕЛЬ». За ход разрешается менять местами две буквы, стоящие через одну (например, первым ходом можно поменять «А» и «И»). Можно ли получить такими операциями слово «АПЕЛЬСИН»?

Задача 3. На столе стоят 7 стаканов дном вверх. Можно переворачивать одновременно любые два стакана. Можно ли, повторяя эту операцию, поставить все стаканы дном вниз?

Задача 4. Хулиган Вася порвал школьную стенгазету на три части. После этого он взял один из кусков и тоже порвал на три части. Потом опять один из кусков порвал на три части и так далее. Могло ли у него в итоге получиться 102 кусочка?

Задача 5. Можно ли ходом коня обойти все клетки шахматной доски, начав с клетки a1, закончив в клетке h8 и на каждой клетке доски побывав ровно один раз?

Задача 6. Круг разделен на 6 секторов, в которых по часовой стрелке стоят числа 1, 0, 1, 0, 0, 0. Разрешено прибавлять по единице к любым числам, стоящим в двух соседних секторах. Можно ли сделать все числа равными?

Задача 7. Круг разбит на 10 секторов. В секторах стоят 10 шашек, по одной в каждом. За один ход разрешается передвинуть две любые шашки, на один сектор каждую (в одинаковых или противоположных направлениях). Можно ли за несколько ходов собрать все шашки в одном секторе?

Задача 8. На доске 3х5 все клетки белые, а верхняя левая клетка — черная. За ход можно поменять цвет всех клеток в одной строке или столбце. Можно ли все клетки сделать белыми?

ДРУГИЕ ИНВАРИАНТЫ

Поиск инварианта (неизменной характеристики) не всегда сводится к нахождению четности чего-либо. Инвариантом может оказаться делимость на какое-то число, остатки при делении, неизменность какой-либо суммы, направление движения и так далее. Приведем пример задачи с инвариантом, отличным от четности.

Пример. Разменный автомат меняет одну монету на пять других. Можно ли с его помощью разменять монету в 100 рублей на 79 монет? (Мы считаем, что есть монеты с любым номиналом.)

Решение. За один раз автомат забирает одну монету, а выдает пять. Значит, количество монет каждый раз — увеличивается на 4. Так как сначала монета была всего одна, то остаток от деления количества монет на 4 на начальный момент равен 1. Так как мы все время увеличиваем количество монет на 4, то остаток от деления их количества на 4 всегда будет равен 1 — это и есть инвариант в данном примере. Однако остаток от деления 79 на 4 равен 3. Значит, 79 монет мы никогда не получим. Заметим, что номинал монеты на решение никак не влияет.

ЗАДАЧИ

Задача 1. В клетках таблицы 3x3 четыре раза записано число 10 и 5 раз — число 40. За один ход можно выбрать два любых числа и одному из них прибавить 3, а от другого отнять 3. Можно ли за несколько ходов добиться того, чтобы все числа в таблице стали одинаковыми?

Задача 2. На 12 деревьях, расположенных по кругу, сидят веселые чижи — по одному на каждом дереве. Каждую минуту какие-то два чижа перелетают: один на соседнее дерево по часовой стрелке, а другой — против. Могут ли все чижи собраться на одном дереве?

Задача 3. В одной из вершин шестиугольника лежит золотая монета, а в остальных ничего не лежит. Кощей Бессмертный чахнет над златом и каждое утро снимает с одной вершины произвольное количество монет, после чего тут же кладет на соседнюю вершину в шесть раз больше монет. Если к исходу какого-то дня во всех вершинах будет поровну монет, Кощей станет властелином мира. Докажите, что хоть злата у него сколько угодно, но властелином мира ему не бывать.

Задача 4. В странах Диллии и Даллии денежными единицами являются диллеры и даллеры соответственно, причем в Диллии диллер меняется на 10 даллеров, а в Даллии даллер меняется на 10 диллеров. Начинающий финансист имеет 1 диллер и может свободно переезжать из одной страны в другую и менять свои деньги в обеих странах. Докажите, что количество даллеров у него никогда не сравняется с количеством диллеров.

Задача 5. На столе лежит куча из 1001 камня. Ход состоит в том, что из какой-либо кучи, содержащей более одного камня, выкидывают камень, а затем одну из куч делят на две. Можно ли через несколько ходов оставить на столе кучки, состоящие только из трех камней?

Задача 6. На льду лежат три шайбы. Хоккеист бьет по любой из шайб так, чтобы она прошла между двумя другими. Могут ли все шайбы вернуться на свои места после 25 ударов?

Задача 7. На острове Серобуромалиния обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся малиновыми и т. д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?

ИНВАРИАНТЫ В ЗАДАЧАХ БЕЗ ПРОЦЕССА

Во всех предыдущих задачах на тему «Инвариант» у нас был какой-то процесс — несколько раз перелетали чижи, прибавляли и отнимали числа, били по шайбе и т.д. Однако во многих задачах, в которых нет процесса, инвариант все же присутствует. Чтобы его найти, процесс можно либо организовать, либо вообще обойтись без него.

Пример 1. Восемьдесят кустов малины растут в ряд. Известно, что число ягод, растущих на любых двух соседних кустах, отличается на 1. Может ли общее количество ягод равняться 2019?

Решение. Здесь нет процесса, в котором мы могли бы искать какой-то инвариант. Давайте создадим процесс сами. Будем размещать ягоды на кустах. Повесим на первый куст четное число ягод. Тогда на второй мы повесим нечетное, на третий — опять четное и т.д. Если же на первом кусте нечетное число ягод, то на втором — четное и так далее. Очевидный инвариант этого процесса, таким образом, — перемена четности количества ягод при переходе от куста к следующему кусту. Из этой перемены четности следует, что в обоих случаях мы получим 40 кустов с четным числом ягод и 40 — с нечетным. Значит, в любом случае общее число ягод — четное число. Значит, общее число ягод равняться 2019 не может.

Замечание. На этом несложном примере мы показали, как можно статичную ситуацию преобразовать в процесс, чтобы воспользоваться инвариантом.

Пример 2. Возьмем произвольным образом 36 чисел из первых 50-ти натуральных. Докажите, что их сумма не может быть равна сумме 14 оставшихся.

Решение. Здесь не будем придумывать процесс. Давайте найдем что-то общее, т.е. инвариант, для наборов чисел, которые можно разбить на две группы с одинаковой суммой. Если для какого-то набора чисел такое разбиение есть, то общая сумма чисел в двух группах будет четной, как сумма двух равных чис для любого такого набора сумма всех его чисел — четное число. Стало быть, то, что сумма чисел набора четная, — инвариант. Так как сумма чисел от 1 до 50 равна 1275 (нечетное число), то разбиение на две группы с одинаковой суммой невозможно.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Из банки с молоком ложку содержимого переливают в стакан с чаем и перемешивают, затем вычерпывают ложку полученной смеси и переливают ее обратно в банку с молоком. Чего теперь больше: чая в банке с молоком или молока в стакане с чаем?

Задача 2. В деревне Пятеркино живут пять математиков, а в деревне Десяткино — десять. Расстояние между деревнями три километра, и они соединены прямой дорогой. Математикам из Пятеркино и Девяткино нужно каждый день собираться всем вместе и решать задачи, для этого они готовы построить математический клуб. Осталось только понять, в каком месте у дороги его строить. Математики хотят, чтобы расстояние, которое они суммарно будут проходить от дома до клуба, было как можно меньше. На каком расстоянии от Пятеркино нужно будет построить клуб?

Задача 3. На шахматной доске на двух соседних по диагонали черных полях стоят две черные шашки. Можно ли дополнительно поставить на эту доску некоторое число черных шашек и одну белую таким образом, чтобы белая, не превращаясь в дамку, одним ходом (перепрыгивая) съела все черные шашки?

Задача 4. На доске 9х9 расставили 9 ладей, не бьющих друг друга. Затем каждую ладью передвинули ходом коня. Докажите, что теперь какие-то две ладьи будут бить друг друга.

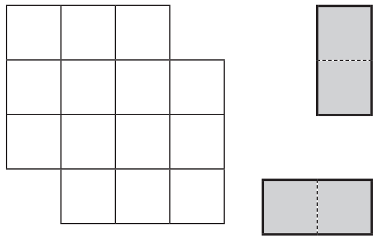
Задача 5. В прямоугольной таблице расставлены числа так, что сумма чисел в любой строке и в любом столбце равна 100. Докажите, что число строк равно числу столбцов.

Задача 6. Из книги вырвали три листа. Может ли сумма номеров страниц этих листов равняться 2019?

ШАХМАТНАЯ РАСКРАСКА

Описание метода использования раскрасок мы приведем чуть позже. Попробуем разобраться в сути происходящего на нескольких примерах.

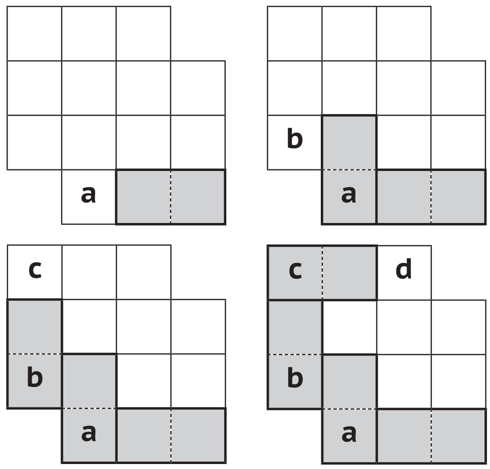
Пример 1. Пусть у нас есть доска 4х4, у которой вырезаны левый нижний и правый верхний углы. Вопрос такой: можно ли полностью и без пересечений покрыть такую доску прямоугольниками размера 2х1? Обычно такие прямоугольники называют доминошками, мы тоже будем их так называть.



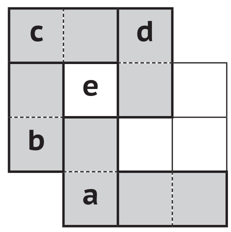
Решение 1. Давайте просто попробуем покрыть доску доминошками. Начнем с правой нижней клетки. Понятно, что ее закрывает либо вертикальная, либо горизонтальная доминошка. Пусть она горизонтальная. Положим ее и клетку рядом обозначим буквой «а».

Клетку «а» может закрывать только вертикальная доминошка, тут у нас выбора нет. Положим ее и клетку рядом обозначим буквой «b». Клетку «Ь» может закрывать только вертикальная доминошка, тут у нас опять не выбора. Положим доминошку и одну из клеток рядом обозначим буквой «с».

И опять — с клеткой «б» нет выбора, ее закрывает вертикальная доминошка. Положим и клетку рядом обозначим «е».



Клетку «е» должна покрывать какая-то доминошка, но горизонтальная пересечется с доминошкой «Ь» или «6», а вертикальная — с «а» или «с». Значит, покрытие без пересечений у нас не получается. Напомню, мы начали с горизонтальной доминошки в правом нижнем углу и на каждом шаге у нас не было выбора, то есть нет шага, где мы можем сказать «А давайте сделаем по-другому». Мы не рассмотрели случай, когда доминошка, закрывающая правый нижний угол, расположена вертикально, но там получится то же самое — с какого-то шага мы не сможем продолжать укладку. Значит, ответ на вопрос, поставленный в задаче, — нет, такое покрытие сделать нельзя.



Обсуждение решения 1

1. Хорошо, что пойдя по прямому и простому пути — просто сделать покрытие, мы смогли задачу решить.

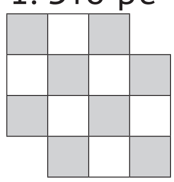
2. Заметим, что нам в каком-то смысле повезло — для клеток «а», «Ь», «с» и «б» расположение покрывающих их домино (вертикальное или горизонтальное) определялось однозначно.

3. Плохо то, что если бы уголки были вырезаны из доски, скажем, 8х8, то так просто у нас бы уже не получилось (там гораздо больше возможностей). Видимо, для досок большего размера задачу все же можно решать примерно так, как мы это делали только что, но это сведется почти к перебору всех вариантов, а их может быть очень много, и такое решение займет очень много времени.

Приведем еще одно решение, которое не имеет недостатков решения 1. Это решение и будет решение методом раскраски.

Решение 2 (раскраска)

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Каждая доминошка, как бы мы ее ни положили, занимает ровно одну белую и одну черную клетки.



Значит, если покрытие есть, то черных и белых клеток должно быть поровну. Но у нас 8 черных и 6 белых клеток. Значит, покрытие невозможно.

Обсуждение решения раскраской

1. Решение раскраской существенно короче, чем первое решение.

2. Заметим, что это решение уже легко обобщить на доски большего размера. Допустим, у нас есть доска 10х10 без левого нижнего и правого верхнего угла. Ее тоже нельзя замостить доминошками — при раскраске в шахматном порядке мы получим 50 клеток одного цвета и 48 другого, а каждая доминошка по-прежнему закрывает по одной черной и одной белой клетке.

3. Раскраска, которая привела нас к решению, породила некий инвариант в данной задаче. Действительно, любая доминошка на раскрашенной доске всегда закрывает две клетки разного цвета. Раскраски, порождающие подобные инварианты, помогают в решении задач такого типа.

Вообще, суть метода раскраски состоит в следующем: раскрасим в несколько цветов некоторые ключевые элементы (например, доску или куб, или числа), которые фигурируют в задаче, и попробуем взглянуть на нее с другой стороны — с точки зрения той структуры, которая получилась. Удачная раскраска позволяет упростить понимание сути вопроса, поставленного в задаче, и существенно продвигает нас к решению. Хотя в целом алгоритма решения задач «методом раскраски» нет, все же решение каждой задачи дает определенный опыт и учит ориентироваться в подобных ситуациях и «распознавать» их.

Решим еще одну задачу несколькими способами и, в частности, методом раскраски.

Пример 2. На клетчатой бумаге нарисован квадрат 5х5. В каждой клетке сидит муравей. По сигналу каждый муравей переползает в соседнюю клетку (соседняя — если есть общая сторона). Могут ли муравьи переползти так, что снова в каждой клетке будет сидеть муравей?

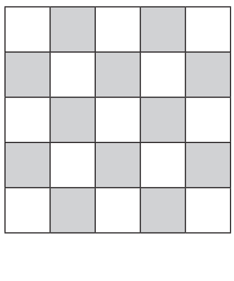
Решение 1. Задачу можно попытаться решить перебором. Прежде чем применять перебор, давайте прикинем количество вариантов, которые нам придется рассмотреть. Отметим в каждой клетке количество клеток, в которые может переползти муравей, сидящий в этой клетке. Вариантов получается $(2^4)\times(3^{12})\times(4^9)$, это примерно 100 000 000, что слишком много. Если же задачу обобщать на квадраты большего размера, то оценка получится еще более разрушительной. Поэтому по пути перебора мы не пойдем.

2	3	3	3	2
3	4	4	4	3
3	4	4	4	3
3	4	4	4	3
2	3	3	3	2

Решение 2. Впишем в каждую клетку сумму номера строки и номера столбца, в котором стоит клетка. Сумма всех чисел, написанных в таблице, будет четной. Возьмем муравья, сидящего в какой-нибудь клетке. После переползания изменится либо номер столбца, либо номер строки этого муравья, причем изменится на 1 (в большую или меньшую сторону). Значит, сумма номера строки и номера столбца муравья тоже изменится на 1. Так как муравьев 25, то сумма сумм номера строки и номера столбца изменится на нечетное число. Если же все муравьи после переползания оказались по одному в клетке, то сумма новых сумм должна совпасть со старой, то есть измениться на 0, а 0 — четное число. Получаем противоречие, значит, такое переползание невозможно.

	1	2	3	4	5
1	2	3	3	3	2
2	3	4	4	4	3
3	3	4	4	4	3
4	3	4	4	4	3
5	2	3	3	3	2

Решение 3 (раскраска). Раскрасим доску в шахматном порядке — как на рисунке. У нас получатся 12 черных и 13 белых клеток и, соответственно, 12 «черных» и 13 «белых» муравьев — по цвету клеток, в которых они сидят.

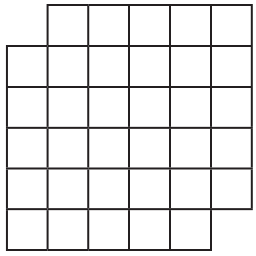


При переползании каждый муравей окажется в клетке другого цвета, и получается, что 13 белых муравьев окажутся в 12 черных клетках. Значит, в какой-нибудь черной клетке окажутся хотя бы два муравья. Значит, переползание, о котором спрашивают в условии, невозможно.

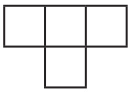
Мы опять быстро и красиво решили задачу методом раскраски.

Замечание. Если у квадрата четное количество клеток на стороне, то задача решается очевидно, например: замостим доску горизонтальными доминошками, и в каждой доминошке муравьи поменяются местами.

ЗАДАЧИ

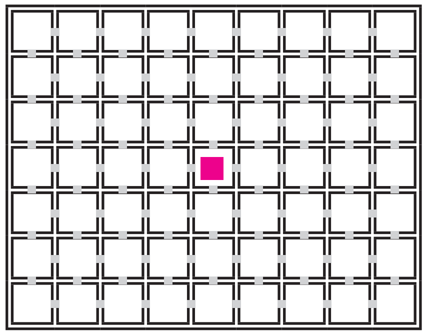


Задача 1. Из доски 6х6 вырезаны две клетки в противоположных углах. Какое самое большое количество доминошек можно разместить без наложения на этой доске?



Задача 2. Можно ли доску размером 10х10 клеток разрезать на фигурки в форме буквы Т, — как на рисунке?

Задача 3. Круг разделен на шесть секторов, в каждом из которых лежит по селедке. Разрешается за о ход передвинуть любые две селедки в соседних секторах, двигая их в разные стороны в соседний к каждой сектор. Можно ли с помощью этой операции собрать всех селедок в одном секторе?



Задача 4. Дворец имеет вид прямоугольника размером 7х9 клеток. Каждая клетка — это комната дворца, кроме центрального зала с бассейном. В каждой стене (стороне клетки) проделана дверь. Можно ли, не выходя из дворца и не заходя в зал с бассейном, обойти все комнаты, побывав в каждой ровно по одному разу?

Задача 5. Кусок сыра имеет форму кубика $3\times3\times3$, из которого вырезан центральный кубик. Мышь начинает грызть этот кусок сыра. Сначала она съедает какой-то кубик $1\times1\times1$. После того как мышь съедает очередной кубик $1\times1\times1$, она приступает к съедению одного из соседних (по грани) кубиков с только что съеденным. Сможет ли мышь съесть весь кусок сыра?

Задача 6. Можно ли из 13 кирпичей $1\times1\times2$ сложить куб $3\times3\times3$ с дыркой $1\times1\times1$ в центре?

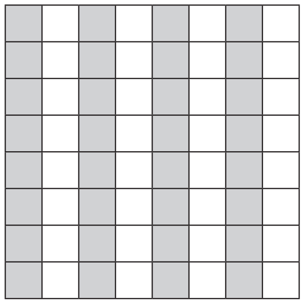
Задача 7. Грани куба $5\times5\times5$ разбиты на единичные клетки. Куб оклеен без наложений бумажными полосками 2×1 (стороны полосок идут по сторонам клеток). Докажите, что число согнутых полосок нечетно.

Задача 8. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться, наибольшее записанное на доске число не больше 32?

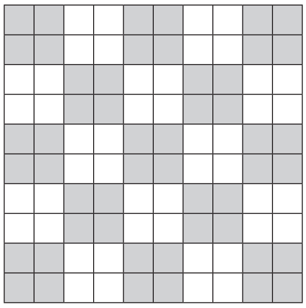
ДРУГИЕ РАСКРАСКИ

Раскраска совсем не обязательно должна быть «шахматной» и состоять из двух цветов. Разберем пару примеров, раскрашивать будем уже по-другому. Задачи, которые Вам будут предложены после примеров, не обязательно решаются с помощью раскрасок именно таких, какие мы используем в примерах ниже, — возможно, надо будет придумать какую-то свою. Заметим, наконец, что для решения некоторых задач могут подойти разные раскраски, а не только те, что предложены нами в подсказках и решениях.

Пример 1. Можно ли замостить шахматную доску тридцатью двумя доминошками так, чтобы 17 из них были расположены горизонтально, а 15 — вертикально? «Замостить» — означает покрыть все клетки без наложений и без пропусков.



Решение (раскраска зеброй). Раскрасим доску «зеброй» — так, как на картинке. Вертикальная доминошка занимает четное число белых клеток (либо 0, либо 2), значит, 15 вертикальных вместе займут четное число белых клеток. Горизонтальная доминошка всегда занимает одну белую и одну черную клетку, поэтому 17 горизонтальных займут 17 белых клеток. Значит, все доминошки займут нечетное число белых клеток. Однако белых клеток ровно 32. Следовательно, выложить доску доминошками нельзя.

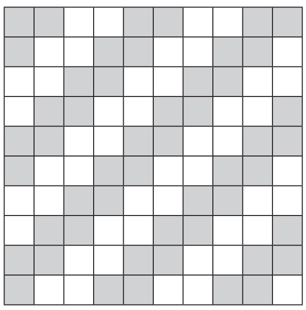


Пример 2. Доказать, что клетчатую доску 10×10 нельзя разрезать по линиям сетки на прямоугольники 1×4.

Решение 1 (крупная шахматная раскраска). Разделим доску на квадраты 2×2 и раскрасим их в шахматном порядке. Заметим, что любой вырезанный прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) черных и белых клеток. Однако при данной раскраске на доске 52 черных клетки и 48 белых, т. е. не поровну. Значит, разрезать доску 10×10 на полоски 1×4 не удастся.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3

Решение 2 (раскраска в 4 цвета). Раскрасим доску диагональной раскраской в 4 цвета. Каждый цвет обозначим цифрой от 1 до 4. Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит по одной клетке каждого из четырех цветов, но при данной раскраске на доске по 25 клеток 1-го и 3-го цветов, 26 клеток — 2-го и 24 клетки — 4-го, т.е. не поровну. Значит, разрезать не удастся.

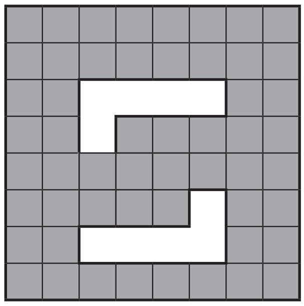


Решение 3. Применим еще одну раскраску. Заметим, что любой прямоугольник 1×4 содержит поровну (по 2) черных и белых клеток, но при данной раскраске на доске 51 черная клетка и 49 белых, т. е. не поровну. Значит, разрезать доску не удастся.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Докажите, что шахматную доску нельзя замостить пятнадцатью полосками 1×4 и одним уголком из четырех клеток.

Задача 2. Дно прямоугольной коробки 10×10 замостили плитками 2×2. Потом плитки высыпали из коробки, и одна плитка 2×2 потерялась. Ее заменили на плитку 1×4. Докажите, что теперь дно коробки замостить не удастся.



Задача 3. Какое максимальное количество клетчатых прямоугольников 1×3 можно вырезать из данной фигурки?

Задача 4. Можно ли замостить прямоугольник 6×10 прямоугольниками 1×4?

Задача 5. Можно ли составить квадрат 6×6 из одиннадцати прямоугольников 1×3 и одного трехклеточного уголка?

Задача 6. Из доски 8×8 вырезали угловую клетку. Можно ли оставшуюся часть разрезать на прямоугольники 3×1?

Задача 7. В каждой клетке квадрата 9×9 сидит жук. По команде каждый жук перелетает на одну из соседних по диагонали клеток. Доказать, что по крайней мере девять клеток после этого окажутся свободными.

ИГРЫ — ВЫИГРЫШНЫЕ ПОЗИЦИИ И АНАЛИЗ ОКОНЧАНИЯ

Пусть в некую игру играют два или более человек. Игра такая, что
• Игроки ходят по очереди.
• В игре для каждого участника возможны лишь выигрыш или проигрыш, ничьих нет.
• Никаких случайностей вроде «сколько выпало очков на игральном кубике», нет.
• Четко определено, какая ситуация является выигрышем.
• Для одного из игроков есть стратегия (набор правил), следуя которой, он точно выигрывает.
• В каждый момент времени игроки обладают полной информацией о предыдущих ходах и текущей позиции.

Наша цель — понять, у кого из игроков есть выигрышная стратегия, и в чем она состоит. Под выигрышной стратегией игрока мы понимаем набор правил, в точности следуя которым игрок обязательно выиграет, какие бы ходы ни делал его соперник. В дальнейшем всегда будем считать, что оба игрока ведут себя разумно и прилагают все усилия для того, чтобы выиграть.

В двух примерах, приведенных ниже, мы находим эту стратегию и игрока, который может ей следовать. Мы делаем это, анализируя игру с конца, отступая ход за ходом от окончания игры — «назад во времени». Советуем поиграть с ребятами в эти игры (из примеров и задач) «физически» — с шахматными фигурами, спичками, карандашами и т.д. — им это, как правило, нравится. Правда, иногда сам процесс игры им интереснее, чем решение задачи:)

Пример 1. В коробке лежат 10 спичек. Двое по очереди вынимают из него одну или две спички. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Решение. Посмотрим, что происходит в конце игры. Пусть только что походил наш противник, и осталась одна спичка. Мы заберем спичку и выиграем, а наш противник проиграет. Если же эта одна спичка себя после нашего хода, мы, естественно, тоже проиграем, а соперник выиграет. Значит, оставить после спичку — проигрыш.

Предположим теперь, что остались две спички, и сейчас наша очередь делать ход. Неразумным поведением было бы забрать одну спичку и оставить одну — это, как мы видели, означает для нас проигрыш, мы, так как хотим выиграть, заберем две спички и выиграем. Точно так же, если эти две спички остались после нашего хода и соперник ведет себя разумно, то мы проиграем. Таким образом, оставить после себя две спички — путь к проигрышу.

Посмотрим, что будет, если после хода нашего соперника остались три спички. Это для нас очень неудачно: как бы мы ни походили, мы оставим после себя одну или две спички — а это, как мы уже знаем, для нас проигрыш, а для нашего соперника — выигрыш. Точно так же, если эти три спички остались после нашего хода, то мы выиграем. Значит, оставить после себя три спички — выигрыш.

Пусть после хода нашего соперника остались четыре или пять спичек. Тогда мы возьмем соответственно одну или две спички, после нас останутся три спички, а это, как мы уже знаем, для нас выигрыш. Значит, оставить после себя четыре или пять спичек — проигрыш.

Пусть соперник оставил после себя шесть спичек. Это опять, случае трех спичек, означает для нас проигрыш. Действительно, мы возьмем одну или две спички и оставим после себя соответственно пять или четыре спички. Как мы уже знаем, оставить после себя четыре или пять спичек — проигрыш. Значит, оставить после себя шесть спичек — выгрыш. Рассуждая далее аналогично, мы получим в конце концов такое распределение:

Выигрыш или проигрыш в зависимости от того, сколько спичек мы оставили								
1	2	3	4	5	6	7	8	9
П	П	В	П	П	В	П	П	В

Давайте теперь посмотрим — кто же выигрывает, и как для этого надо играть. От начала игры первое выигрышное положение — оставить после себя девять спичек. Первый игрок, если возьмет одну спичку, как раз в это выигрышное положение и попадает. В дальнейшем первому остается лишь вести себя аккуратно — на каждом шаге не промахиваться мимо выигрышного положения — оставить после себя шесть спичек, потом три и, наконец, забрать то, что останется. Значит, следуя стратегии «попадать на выигрышное положение», выигрывает первый.

Замечание 1. Подчеркнем еще раз — то, что один из игроков после своего хода оказался в выигрышном положении, еще не означает, что он выиграет в любом случае. Он обязательно выигрывает, если следует выигрышной стратегии, то есть ведет себя разумно. Если же он не будет следовать стратегии, то может и проиграть. Точно так же — то, что один из игроков после своего хода оказался в проигрышном положении, не означает, что он обязательно проиграет. Однако он точно проиграет, если его противник будет следовать выигрышной стратегии. Если же противник не будет соблюдать правила выигрышного поведения, то тот, кто сейчас в проигрышном положении, может выиграть. Напомним, мы предполагаем, что наш соперник разумен и стремится к выигрышу, так что лучше нам не попадать в проигрышные положения.

Допустим, и первый, и второй игрок придумали себе правило «всегда брать одну спичку» — ну так им захотелось — они пока не очень разумны или им просто хочется вместе провести время, а результат не важен. Очевидно, что второй заберет последнюю спичку и выиграет. Однако при этом первый был в выигрышном положении несколько раз и все равно проиграл, а второй — несколько раз в проигрышном, но в конце концов выиграл.

Замечание 2. Мы использовали понятия «выигрышное положение» и «проигрышное положение» — интуитивно понятно, о чем речь, но давайте все же дадим определение. Любой игрок, сделав ход, создает новую ситуацию или «положение дел» в игре. Если эта ситуация такова, что игрок, ее создавший, в дальнейшем, следуя определенным правилам, точно выигрывает, то эту ситуацию мы и называем «выигрышное положение». Если же созданная ситуация такова, что выигрыш себе может обеспечить соперник, то ее мы называем «проигрышным положением».

Пример 2. Шахматный король стоит в левом нижнем углу шахматной доски. Два игрока ходят по очереди, один ход его можно передвинуть на одно поле вправо, на одно поле вверх или на одно поле по диагонали право-вверх. Выигрывает игрок, который поставит короля в правый верхний угол доски. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, и как он должен играть?

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8							-	+	8
7							-	-	7
6									6
5									5
4									4
3									3
2									2
1									1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Решение. Покажем, что в этой игре выигрышная стратегия есть у первого. Договоримся о терминах: если игрок создал после своего хода выигрышное положение, то поле, на которое он при этом походил, будем называть «выигрышное поле». Если же он создал проигрышное положение, то соответствующее поле — выигрышное». Давайте посмотрим, какие поля выигрышные, а какие проигрышные. Анализируем, как и в предыдущей задаче, с конца игры.

Поле h8, очевидно, выигрышное, поставим в нем «плюс». Значит, встать на любое из полей рядом — g8, g7 и h7 — проигрыш. Действительно, если я встал на какое-то из этих полей, то мой соперник следующим ходом встает на b8 и выигрывает, а я, соответственно, проигрываю. Картина выигрышных и проигрышных полей на данный момент такая:

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8						+	-	+	8
7						-	-	-	7
6						+	-	+	6
5									5
4									4
3									3
2									2
1									1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Разберемся теперь с полями, находящимися рядом с теми, с которыми мы только что определились — выигрышные они или проигрышные. Поле f8 — выигрышное: действительно, если я на него встал, то мой соперник может пойти только на g8, а это проигрышное поле. Поле f7 — проигрышное, так как если я на него встал, то мой разумный соперник идет на f8, а это, как мы только что установили, выигрышное поле.

Из соображений симметрии h6 — выигрышное, g6 — проигрышное (или можно повторить рассуждения, алогичные предыдущим). Так как любой ход из f6 приводит на проигрышное поле, то поле f6 — выигрышное.

Продолжая аналогичные рассуждения, получаем полную картину проигрышных и выигрышных позиций. Видно, что выигрышная стратегия есть у первого: он первым ходом встанет на поле b2 и в дальнейшем будет ставить короля на выигрышные поля.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Играют двое. Игра начинается с числа 0. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу у любое натуральное число от 1 до 9 Например: первый сказал «шесть». Второй прибавил семь и сказал «тринадцать». Первый прибавил пять и сказал «восемнадцать» и т. д. Выигрывает тот, кто скажет «сто». Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш, и как он должен играть?

Задача 2. В коробке лежат 22 спички Два игрока по очереди вынимают из него от 1 до 4 спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 3. В коробке лежат 30 спичек. Два игрока по очереди вынимают из него от 1 до 5 спичек. Выигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Кто выигрывает при правильной игре и как он должен играть?

Задача 4. Игра начинается с числа 2. За ход разрешается прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее его. Выигрывает тот, кто получит 100. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 5. Игра начинается с числа 1. За ход разрешается умножить имеющееся число на любое натуральное число от 2 до 9. Выигрывает тот, кто первым получит число, большее 1000. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 6. Ферзь стоит на поле c1. За ход его можно передвинуть на любое число полей вправо, вверх или по диагонали «вправо-вверх». Выигрывает тот, кто поставит ферзя на поле h8. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 7. Играют два человека, ходят по очереди. Есть две кучки камней: в первой — 7, во второй — 5. За один ход можно взять любое количество из любой кучки либо одинаковое количество из обеих. Проигрывает тот игрок, который не в состоянии сделать ход. Кто может обеспечить себе выигрыш — первый игрок или второй?

Задача 8. Конь стоит на поле a1. За ход разрешается передвигать коня на две клетки вправо и одну клетку вверх или вниз или на две вверх и на одну вправо или влево. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

ИГРЫ С СИММЕТРИЧНОЙ СТРАТЕГИЕЙ – 1

Существование симметричной стратегии для одного из игроков означает, грубо говоря, что он на каждом шаге может сделать то же самое, что и его соперник, но в другом месте. Симметрия – понятие широкое, мы не будем его обсуждать. Заметим лишь, что симметрия бывает центральная, бывает относительно какой-нибудь прямой, можно ввести понятие симметрии относительно кривой, бывает в каком-то смысле симметричное поведение. Это довольно расплывчато, поэтому давайте рассмотрим пару примеров. Если есть возможность, поиграйте в эти игры по-настоящему, так легче понять и как устроена игра, и в чем состоит выигрышная стратегия.

В каждой из игр два участника, потому писать каждый раз «Играют двое» не будем.

Пример 1. На столе лежат две кучки по 7 монет. За один ход разрешается взять любое количество монет из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

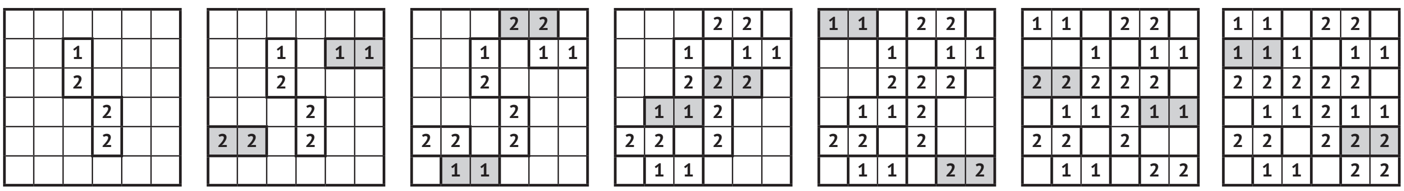
Решение. Покажем, что второй может обеспечить себе выигрыш. Каждый ход он делает так: смотрит, сколько только что взял первый, и берет столько же, но из другой кучки. Посмотрим, что получится при таком поведении второго. Понятно, что после каждого хода второго в обеих кучках одинаковое число монет, а после каждого хода первого – разное. Так как после каждого хода количество монет уменьшается, то игра когда-то закончится. Когда в обеих кучках ничего не останется – то есть окажется по ноль монет (поровну), это, как мы выяснили, произойдет после хода второго, а не после хода первого. Значит, выиграет второй.

Замечание. Понятно, что дело не в том, что в кучках сначала по 7 монет, а в том, что их сначала одинаковое ичество.

Пример 2. Есть доска 6×6. За ход можно положить доминошку на какие-то два ее поля (доминошки не должны перекрываться). Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Решение. Покажем, что второй может обеспечить себе выигрыш. Он смотрит, как только что положил доминошку первый, и кладет свою симметрично относительно центра доски. Приведем пример, как при таком поведении второго могла бы сложиться игра (у второго жесткая стратегия, поэтому разнообразие в партию вносит первый).

Видно, что выиграл второй. Дело в том, что у второго при такой стратегии всегда есть возможность ответного хода – значит, если кто-то не может сделать ход, то это первый, он и проигрывает. То, что у второго всегда есть возможность ответить, интуитивно понятно.



Замечание. Важным моментом при решении задач такого сорта является обоснование возможности ответного хода при выбранной стратегии и того, что игра конечна – то есть что она закончится через какое-то количество ходов. Мы подробнее рассмотрим этот вопрос в в разделе «Игры – возможность ответного хода». В задачах этого раздела существование ответного хода и конечности игры практически очевидны, и строгим обоснованием можно не заниматься.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Два игрока расставили фигуры по шахматным правилам, но не все, а только пешки, остальные фигуры убрали. Они договорились ходить ими так же, как обычно ходят в шахматах, но не есть пешки друг друга. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход (все пешки уткнутся друг в друга). Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и какой должен играть?

Задача 2. Двое по очереди ставят слонов на шахматную доску так, чтобы они не били друг друга. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 3. У ромашки 12 лепестков. За ход разрешается сорвать либо один лепесток, либо два рядом растущих лепестка. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 4. Двое по очереди ставят на шахматную доску коней так, чтоб они не били друг друга. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 5. Есть доска 7×7 с вырезанной центральной клеткой. За один ход можно закрасить одну клетку или две соседние. Проигрывает игрок, который не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 6. Ладья стоит на поле a1 шахматной доски. За один ход можно пойти на сколько угодно клеток вверх или на сколько угодно направо. Выигрывает тот, кто поставит ладью на поле h8. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

ИГРЫ С СИММЕТРИЧНОЙ СТРАТЕГИЕЙ -2. СОЗДАНИЕ СИММЕТРИИ

В предыдущих задачах на тему «Игры с симметричной стратегией» возможность симметричного ответа была, скажем так, видна сразу. В задачах ниже ситуация чуть сложнее — один из игроков должен создать себе возможность симметричного ответа. Приведем пример.

Пример. В двух кучках лежат конфеты: в первой — 13, во второй — 10. Играют двое. Ход состоит в том, что игрок съедает несколько конфет, но только из одной кучки. Побеждает тот, кому достанется последняя конфета. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Решение. Первый возьмет три конфеты, получатся две кучки по 10 конфет. В игре с равными кучками (рассмотрена в части 1) победу себе может обеспечить тот, кто ходит вторым. Так как в игре с кучками по 10 конфет второй игрок — это тот, кто в исходной игре первый, то он и выиграет. Заметьте — он своим первым ходом сам для себя создал возможность симметрично отвечать в дальнейшем.

ЗАДАЧИ

Напоминаем, что в каждой из игр два участника, потому писать каждый раз «Играют двое» не будем.

Задача 1. В ряд лежат 25 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 2. В ряд лежат 30 монет. За ход разрешается брать одну или две рядом лежащие монеты. Проигрывает тот, кому нечего брать. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 3. На окружности расставлено 12 точек. За ход разрешается соединить любые две из них отрезком, не пересекающим проведенных ранее отрезков. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 4. Игроки по очереди кладут пятаки на круглый стол, причем так, чтобы они не накладывались друг на друга и не падали со стола. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

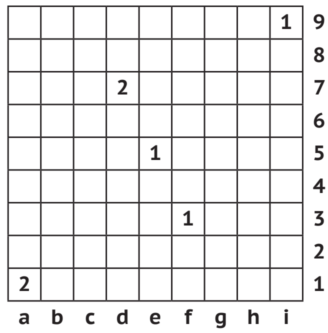
Задача 5. В каждой клетке доски 9×9 стоит шашка. За ход разрешается снять с доски любое количество подряд идущих шашек либо из одного вертикального, либо из одного горизонтального ряда. Выигрывает тот, кто снимет последнюю шашку. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

ИГРЫ — ВОЗМОЖНОСТЬ ОТВЕТНОГО ХОДА

Идея симметричного ответа не сложна. Чаще всего интуитивно ясно, что возможность такого ответа есть, но все же без ее обоснования решение явно не является полным. Потому полное обоснование возможности симметричного ответа надо уметь проводить. Задачи этого раздела рассчитаны не столько на нахождение стратегии, сколько как раз на обоснование возможности ответного хода.

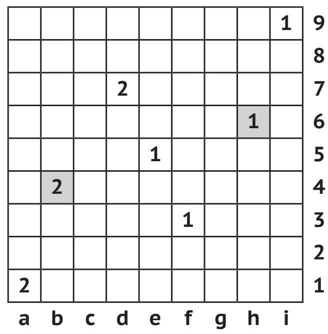
Пример. Двое по очереди ставят королей в клетки доски 9×9 так, чтобы короли не били друг друга. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Решение. Покажем, что первый, следуя определенным правилам, выигрывает.

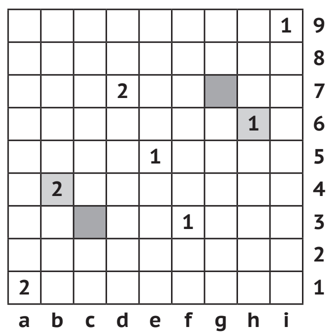


Первым ходом первый игрок ставит короля в центр доски — на поле e5. После этого, куда бы ни пошел второй, первый отвечает ему симметрично относительно центра. Например: второй поставил короля на a1 — первый ответил на i9. Потом второй, скажем, на d7 — первый на f3 и так далее.

Почему же всегда есть возможность для ответного хода первого? Для этого нужно разобраться, во-первых, почему поле, симметричное тому, куда только что поставил короля второй, свободно и, во-вторых, что, если даже свободно, то почему король, который будет туда поставлен, не сможет никого бить?



Разберемся с первым вопросом — почему поле свободно. Предположим, через несколько ходов второй поставил короля на поле, скажем, b4. Первый, согласно своим правилам, должен использовать поле h6. Может ли случиться так, что поле h6 уже занято? Если оно занято, то возможны два варианта — короля туда поставил либо первый игрок, либо второй. Первый мог поставить на h6 только в ответ на ход второго на b4, но второй только что походил на b4, первый еще не отвечал на его ход. Значит, первый не мог поставить на h6. Если же второй когда-то занял своим королем поле h6, то первый ответным ходом занял бы поле b4, а мы предположили, что второй именно на это поле только что поставил короля, очевидное противоречие. Значит, поле h6 не занято, и первый может поставить туда короля. Почему поле b4 свободно — мы разобрались.



Давайте теперь посмотрим, почему король, которого первый поставит на h6, никого не будет бить. Пусть рядом с полем h6 — на поле, скажем, g7 — есть король. Раз он там есть — его кто-то поставил. Допустим, его когда-то туда поставил первый. Так как первый симметрично отвечает на ходы второго, то король на g7 был поставлен в ответ на то, что второй поставил короля на c3. Но если на c3 есть король, то второй не мог бы поставить короля на b4, а он его туда поставил. Теперь допустим, что на g7 когда-то короля поставил второй. Но следующим ходом первый поставил бы короля на c3, но на c3 короля, как мы только что видели, быть не может. Значит, на поле g7 короля нет. Следовательно, король, которого поставили на h6, никого не бьет.

Мы показали, что у первого всегда есть возможность ответить на ход второго. Поэтому тот, кто когда-то не сможет сделать ход, — второй. Значит, строго следуя своим правилам, выигрывает первый.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Два игрока делают ходы на клетчатое доске 5×8 клеток. За один ход игрок закрашивает одну или несколько клеток, образующих квадрат. Закрашивать клетки дважды не разрешается. Выигрывает тот, кто закрасит последнюю клетку. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 2. Двое по очереди ставят ладей на шахматную доску — можно так, чтоб они били друг друга. Выигрывает тот, после хода которого все клетки оказываются битыми поставленными ладьями. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

Задача 3. На клетчатом поле размером 99×99 клеток играют двое. Первый игрок ставит крестик на центр поля; вслед за этим второй игрок может поставить нолик на любую из восьми клеток, окружающих крестик первого игрока. После этого первый ставит крестик на любое из полей рядом с уже занятыми и т.д. Первый игрок выигрывает, если ему удастся поставить крестик в любую угловую клетку. Второй выигрывает, если не даст первому возможность это сделать. Доказать, что при любой игре второго игрока первый всегда может выиграть.

Во всех предыдущих задачах было понятно, что игра после какого-то хода закончится. Именно это соображение давало нам возможность утверждать, что если у кого-то из игроков всегда есть возможность ответного хода, то этот игрок и выиграет. Однако есть задачи, в которых, кроме возможности ответного хода, надо доказывать и то, что игра когда-нибудь закончится, — что не произойдет, скажем так, «зацикливание». Следующая задача как раз такая.

Задача 4. На поле 5×5 стоят в шахматном порядке белые и черные фишки, причем черные — в углах, а центральная клетка свободна. Играют двое. Первый ходит только белыми, второй — только черными. Ход состоит в том, что игрок передвигает фишку (разрешенного ему цвета) на свободную соседнюю по стороне клетку — если такая клетка найдется. Проигрывает тот, кто не сможет сделать ход. Кто из игроков может обеспечить себе выигрыш и как он должен играть?

ПОНЯТИЕ О ГРАФАХ

Перед тем, как мы скажем, что такое «граф», разберем пару примеров, рисуя подходящие картинки.

Пример 1. В шахматном турнире участвуют семь школьников. По правилам турнира каждый с каждым должны сыграть по одной партии. Часть турнира уже прошла. Известно, что Ваня сыграл 6 партий, Толя — 5, Леша и Дима — по 3, Семен и Илья — по 2, Женя — 1. С кем сыграл Леша?

Решение. Сделаем так: нарисуем семь точек — семь ребят (рис. 1).

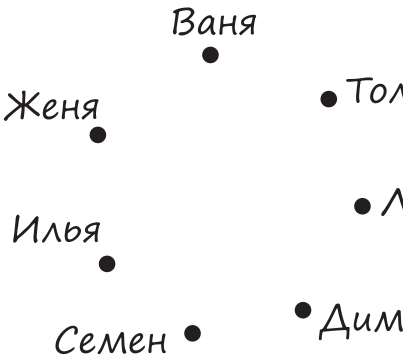


рис. 1

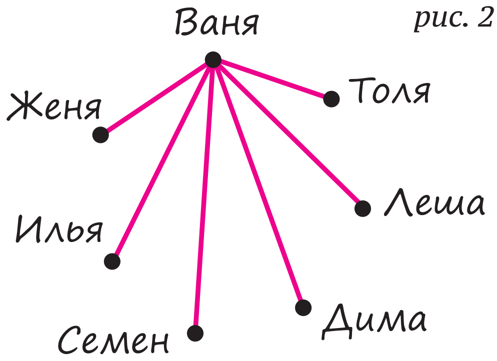


рис. 2

Если кто-то с кем-то сыграл, — соединим отрезком. С Ваней все понятно — он сыграл 6 партий — значит, от Вани надо ко всем нарисовать отрезки (рис. 2).

Заметим, что мы уже при этом отметили единственную партию, которую сыграл Женя. С Ваней и Женей мы разобрались, их партии уже нарисованы, больше их ни с кем отрезками не соединяем. Отметим Толины партии — так как с Женей он не играл, то свои пять партий он сыграл с остальными (см. рис. 3).

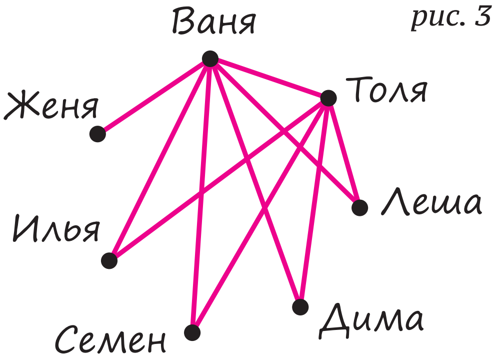


рис. 3

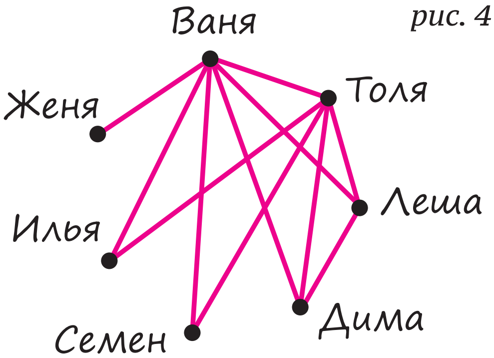


рис. 4

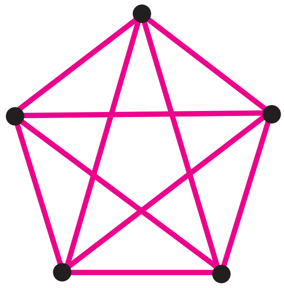
Заметим, что все партии Семена и Ильи уже оказались отмечены. Осталось отметить третьи партии Леши и Димы. Так как все партии остальных участников отмечены, то они могут сыграть третьи партии только друг с другом (окончательная картинка на рис. 4).

Значит, ответ в задаче такой: Леша сыграл с Ваней, Толей и Димой.

Замечание. Можно попытаться решить задачу перебором — выписать все возможные варианты проведения турнира и выбрать подходящие под условия задачи. Оценим усилия, которые придется приложить на этом пути: всего будет сыграна $7 \times 6:2=21$ игра (те, кто не знаком с началами комбинаторики, могут поверить на слово). Значит, число разных расписаний турнира равно $21!$ — это примерно 50 миллиардов миллиардов. Можно воспользоваться тем, что уже сыграно $(6+5+3+3+2+2+1):2=11$ партий, количество вариантов уменьшится, но их все равно будет очень много. По этой причине мы от перебора отказываемся.

Пример 2. Андрей, Боря, Витя, Гриша и Дима при встрече обменялись рукопожатиями (каждый пожал руку каждому по одному разу). Сколько всего рукопожатий было сделано?

Решение. Нарисуем схему рукопожатий: ребята — точки, рукопожатие — отрезок, соединяющий соответствующие точки. Получится картинка справа:



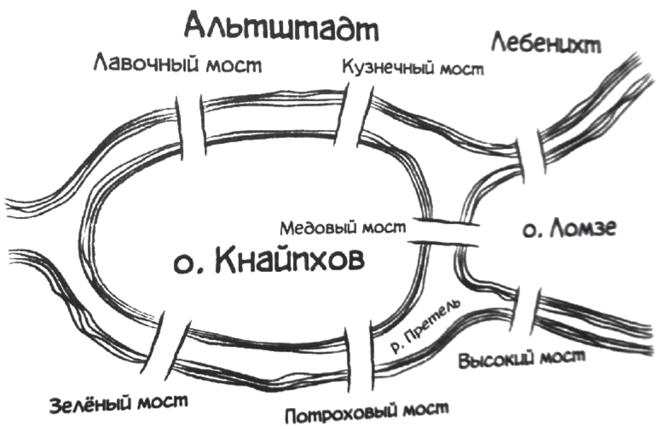
Осталось аккуратно подсчитать количество отрезков-рукопожатий. Их получается 10 штук.

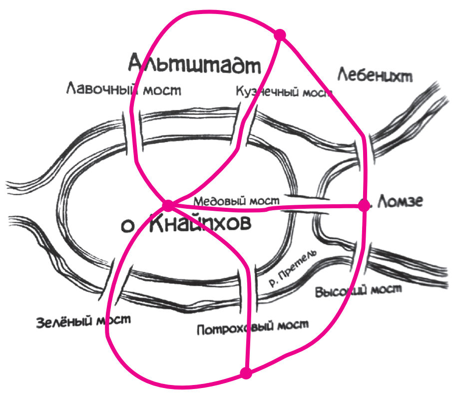
Обе задачи мы решили с помощью специальных рисунков — точек и соединяющих их кривых (пока что мы рисовали только отрезки). Эти рисунки относятся к схемам, для которых есть специальное название — граф.

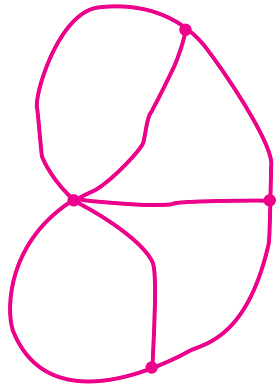
Определение графа, вершин и ребер. Граф — это схема, состоящая из точек и соединяющих эти точки кривых. Точки называются вершинами графа, а кривые, соединяющие эти точки — ребрами графа.

Заметьте, что в понятии графа говорится не об отрезках, соединяющих точки, а о кривых. Во-первых, отрезки тоже кривые, только специальные — они «прямые кривые». Во-вторых, если бы мы в заданные партии и рукопожатия не прямыми линиями, а извилистыми то, очевидно, по сути бы ничего не изменилось — только рисунок стал бы немного другим. В третьих, при таком определении две вершины могут быть соединены несколькими кривыми. Если бы мы говорили, что это именно отрезки, то изобразить несколько соединений для двух вершин было бы невозможно, поскольку на рисунке такие отрезки будут совпадать. Значит, отрезками невозможно изобразить любой граф. Сформулируем задачу, в соответствующем графе к которой необходимо использовать кривые.

Пример 3. Задача о Кенигсбергских мостах (поставлена и решена математиком Леонардом Эйлером). Справа — план мостов в городе Кенигсберге (сейчас он называется Калининградом). Вопрос такой: можно ли осуществить прогулку по городу таким образом, чтобы, пройдя ровно по одному разу по каждому мосту, вернуться в место, откуда начиналась прогулка? Решая эту задачу, Эйлер изобразил Кенигсберг в виде графа, отождествив его вершины с частями города, а ребра — с мостами, которыми связаны эти части. Если теперь оставить только сам граф, то картинка будет как на рисунке ниже.







Вопрос в задаче будет теперь звучать следующим образом: «Можно ли, не отрывая карандаш от бумаги, нарисовать этот граф так, чтобы каждое ребро было нарисовано ровно один раз?»

Задачу о мостах мы оставляем для самостоятельного решения. Похожие задачи на обход пути встречаются довольно часто. Подход к решению таких задач приведен нами в решении задачи 7.

Сейчас же она нам нужна была для того, чтобы обосновать то, что в определении графа мы говорим о кривых, а не только об отрезках. Действительно, если бы мы в определении графа ограничились только отрезками, то схему к задаче о мостах нарисовать не смогли бы. Тем самым мы сделали бы поле для наших задач более «бедным».

Степень вершины. Связь между степенями, количеством вершин и ребер.

Дадим важное определение.

Степень вершины — количество ребер графа, исходящих из этой вершины. Вершина называется четной, если ее степень четная, и нечетной — если ее степень нечетная.

Посмотрим на граф, который появился в примере 1. Степень вершины Вани — 6, Толи — 5, Леши и Димы — 3, Ильи и Семена — 2, Жени — 1. Вершины Вани, Ильи и Семена — четные, остальные — нечетные.

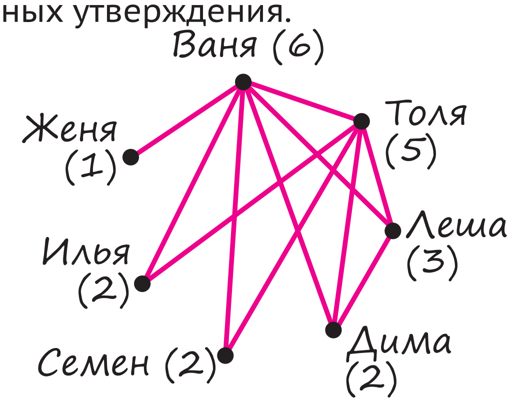
Теперь посмотрим на граф из задачи Эйлера о мостах. Степень вершины A равна 5, вершин B, C и 0 — 3. Здесь все вершины — нечетные.

Рассмотрим еще один полезный пример.

Пример 4. В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Других дорог нет. Сколько всего дорог в государстве?

Решение. Составим граф дорог в этом государстве. Города — это вершины, дороги — это ребра. Степень вершины, соответствующей городу, — количество дорог, выходящих из города, то есть 4. Сумма степеней всех вершин равна количеству концов всех дорог, то есть количеству городов, умноженному на 4, это будет 400. Так как у каждой дороги два конца, то дорог в два раза меньше, чем концов. Значит, количество дорог равно сумме степеней вершин, деленной на 2. Поэтому число дорог равно 400:2=200.

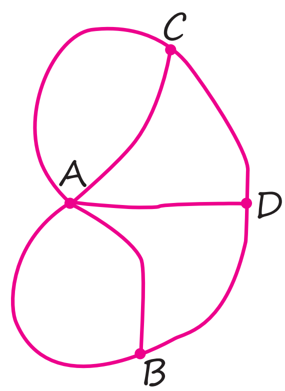
Приведем и докажем два несложных, но очень полезных утверждения.



Утверждение 1. Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному числу ребер графа.

Давайте разберемся, почему это так. Дело в том, что у каждого ребра два конца. Одним концом ребро выходит из одной вершины, другим — из другой (а, может, из той же самой). Значит, если одно ребро дает единицу в общем количестве ребер, то вклад в общее число степеней от одного ребра равен уже двум — из-за двух концов. Таким образом, сумма степеней вершин — это количество концов у ребер, а их в два раза больше, чем самих ребер.

Следствие. Сумма степеней всех вершин графа — четное число.



Утверждение 2. Число нечетных вершин любого графа четно.

Давайте разберемся, почему это так. Обозначим сумму всех степеней вершин буквой A. Сумму четных степеней обозначим B, сумму нечетных степеней — C. Очевидно, A=B+C. A — четное число по следствию к утверждению 1. B — четное число как сумма четных чисел. Так как C=A-B, то C — тоже четное число. Так как C — сумма нечетных слагаемых, то этих слагаемых должно быть четное число. Так как число слагаемых равно числу нечетных вершин, то число нечетных вершин — четно.

Пример 5. В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 — по 4 друга, а 10 — по 5 друзей?

Решение. Пусть это возможно. Составим граф дружественных отношений в классе. Пусть вершины — школьники. Если два человека дружат, то соответствующие им вершины соединены ребром. В таком графе будет 9+10=19 нечетных вершин. Но нечетных вершин, по утверждению 2, должно быть четное число. Значит, такой граф не может быть построен и ситуация, описанная в задаче, невозможна.

ЗАДАЧИ

Задача 1. Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?

Задача 2. Вася сказал своему приятелю Пете: «У нас в классе тридцать пять человек. И представь, каждый из них дружит ровно с одиннадцатью одноклассниками...». «Не может этого быть», — сразу ответил Петя, знавший теорию графов. Почему он так решил?

Задача 3. Можно ли нарисовать на плоскости девять отрезков так, чтобы каждый пересекался ровно с тремя другими?

Задача 4. На занятие пришли 24 школьника, и среди них отличница Маша. Руководитель спросил каждого, кроме Маши, сколько у них знакомых среди остальных пришедших. В ответ прозвучали только числа 3 и 5. Докажите, что Маша с кем-нибудь знакома.

Задача 5. Вася, вернувшись из путешествия, рассказывал, что видел озеро, на котором имеются семь островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?

Задача 6. В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?

Задача 7. Решите задачу Эйлера о мостах (сформулирована в примере 3).

Задача 8. Жук ползет по ребрам куба. Сможет ли он последовательно обогнуть все ребра, проползая по каждому ребру ровно один раз?

КОМБИНАТОРИКА АККУРАТНЫЙ ПЕРЕБОР, ПРАВИЛО СЛОЖЕНИЯ И ПРАВИЛО УМНОЖЕНИЯ

В этой теме рассматриваются задачи, связанные с подсчетом количества комбинаций. Комбинация — это, например, способ расставить несколько предметов в определенном порядке и тому подобное. Комбинаторные задачи для младших школьников полезно давать, начиная с простых и наглядных задач, которые решаются перечислением всех подходящих способов (комбинаций). Комбинаторика позволяет уйти от подсчета способов с помощью прямого перебора, предлагая более эффективные методы вычислений.

Условно можно разбить все комбинаторные задачи по сложности на несколько уровней. На каждом уровне происходит некоторая «эволюция» идей о том, как можно организовать перебор и подсчет. Прежде чем давать учащимся задачи следующего уровня, важно убедиться, что дети хорошо понимают задачи предыдущего уровня. Поговорим о том, какие есть основные уровни и какие идеи позволяют находить решение соответствующих комбинаторных задач.

Сложение.

В простых задачах при подсчете количества способов используется сложение. Полезно ввести для детей прием «аккуратного перебора» — это такой перебор, который гарантирует нам, что при подсчете: 1) никакой вариант не будет пропущен; 2) никакой вариант не будет посчитан дважды.

Пример 1. У Бориса есть три различные рубашки и пять различных футболок. Сколько у Бориса есть способов надеть на прогулку какую-то одну из этих вещей?

Решение. Если Борис решит надеть рубашку, то ее можно выбрать 3 способами, если же он решит надеть футболку, то ее можно выбрать 5 способами. Остается подсчитать общее количество способов: 3+5=8 способов — это и есть окончательный ответ.

Замечание. Аккуратный перебор организовать здесь крайне просто: по очереди берем все рубашки, затем по очереди берем все футболки. Ничего не пропустили, ничего не посчитали дважды.

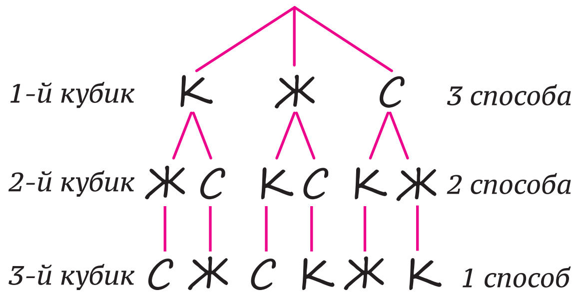
Здесь использовано так называемое правило сложения: если все возможные способы можно отнести к нескольким отдельным ситуациям и при этом каждый способ относится ровно к одной ситуации, то общее количество способов — это сумма количества способов в каждой ситуации.

Разберемся, как это правило применяется в решении примера 1. Любой способ относится к одной из двух ситуаций: в первой ситуации Боря надевает рубашку, и это можно сделать это тремя способами; во второй ситуации Боря надевает футболку и это можно сделать пятью способами. Чтобы подсчитать общее количество способов, необходимо сложить количество способов в каждой отдельной ситуации.

В примере 1 правило сложения применимо, поскольку каждый способ выбора вещи относится только к первой или только ко второй ситуации.

Пример 2. У Маши есть три кубика — красный, желтый и синий. Каким количеством способов можно поставить их в ряд?

Решение. Обозначим кубики первыми буквами их цветов: К, Ж, С. Если на первое место поставить кубик К, то два остальных можно поставить двумя способами — ЖС и СЖ. Затем, если поставить на первое место кубик Ж, то аналогично это даст еще два способа и, если поставить на первое место кубик С, — еще два способа. Всего 2+2+2=6 способов.



Замечание. Мы снова воспользовались правилом сложения. Вначале все возможные способы удалось отнести к трем отдельным ситуациям, в зависимости от того, какой кубик стоит на первом месте. Подчеркнем, что в различных ситуациях нет повторяющихся способов, поскольку в этом случае на первом месте стоят разные кубики. Каждая ситуация содержит два способа расстановки. Затем остается сложить количество способов из каждой ситуации. Для наглядности можно организовать аккуратный перебор с помощью «Дерева инвариантов (возможностей)». Это упорядочивает восприятие, кроме того, повторение элементов структуры в дальнейшем помогает перейти к пониманию правила умножения.

Типичные ошибки в комбинаторных задачах у детей возникают от невнимательного прочтения условия (бывает, что условие недостаточно полно сформулировано и может вызывать вопросы). Например, про кубики могло быть неясно, что требуется поставить в ряд все три кубика, а не два. В таких случаях нужно уточнять, о чем именно спрашивается в задаче.

Подчеркнем еще раз, что на начальном этапе понимания комбинаторных задач особенно хорошо использовать условия, где «аккуратный перебор» можно организовать наглядно. Это облегчает детям понимание и приучает упорядочивать перебираемые способы. Помимо дерева вариантов подойдут любые наглядные подходы для подобного упорядочивания. В примере 3 можно, например, нарисовать пути из условия и поочередно обводить их более яркими (и разноцветными) ручками.

Пример 3. От Пятачка к Винни-Пуху ведут 3 дорожки, а от Винни к дому Кролика ведут 4 дорожки. Сколько способов у Пятачка попасть в гости к Кролику, захватив с собой по пути Винни-Пуха?

Решение. Рассмотрим три отдельные ситуации:

1) Пятачок пошел сначала по 1-й дорожке;
2) Пятачок пошел сначала по 2-й дорожке;
3) Пятачок пошел сначала по 3-й дорожке.

В каждой ситуации, дойдя до Винни-Пуха, друзья могли выбрать одним из четырех способов дорожку к дому Кролика. По правилу сложения получаем, что всего способов будет 4+4+4=12.

Умножение.

Когда вариантов становится слишком много, приходится искать какой-то подход для их подсчета без перебора «вручную». Правило сложения при этом (во многих случаях) естественным образом превращается в правило умножения когда становится видно, что во всех ситуациях количество способов одинаково, то уже удобнее не складывать, а умножать количество ситуаций на количество способов в каждой из них.

Так, в примерах 2 и 3 уже вполне можно было бы использовать операцию умножения. Именно здесь не стоит торопить учащихся, пусть они сами увидят повторяемость количества способов в каждой ситуации и предпочтут использовать умножение.

Замечание. Другими словами правило умножения можно описать так: сделав выбор 1, мы отнесем все возможные способы к нескольким отдельным ситуациям. В каждой из этих ситуаций нам предстоит сделать выбор 2, и при этом количество вариантов сделать выбор 2 будет одинаковым в каждой ситуации. Тогда количество ситуаций (вариантов сделать выбор 1) мы умножаем на количество вариантов сделать выбор 2, и произведение будет равно искомому в задаче количеству способов (в примере 3 — дойти от Пятачка до Кролика).

Пример 4. На обед у Пети есть на выбор пять разных супов, четыре разных вторых и два разных компота. Сколько у Пети способов составить обед из всех трех блюд?

Решение. Выбор супа разбивает все способы на пять ситуаций. В каждой из них по правилу умножения будет $4\times2=8$ вариантов выбрать второе и компот. Тогда, снова применяя правило умножения, получаем, что общее количество способов составить обед это $5\times8=40$.

Разбиение на подмножества

Отметим также, что рассмотрение различных ситуаций является разбиением всего множества способов на подмножества. Это помогает разбить задачу со сложным условием на несколько однотипных задач попроще. Так, рассматривая кубики в примере 1, мы рассматривали три различных подмножества (ситуации): когда на первом месте стоит красный кубик, когда желтый, и когда зеленый.

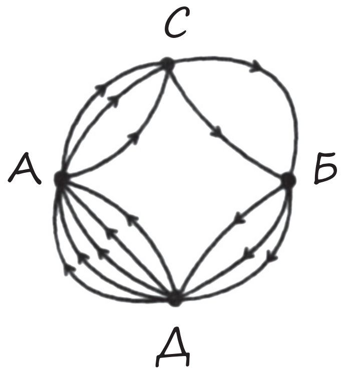
В каждом подмножестве содержится свое количество способов (зачастую — одинаковое), которые затем остается сложить. Даже если подмножества окажутся не однотипными, в каждом из них ситуация упростится и можно ожидать, что в них будет легче разобраться. Важно убедиться при этом, что подмножества не пересекаются, т. е. никакой способ не попадает одновременно в несколько различных подмножеств. Если это все-таки так, то необходимо не забыть вычесть количество повторяющихся способов.

Завершая идею об использовании множеств, заметим, что часто бывает удобно вычесть из множества всех способов (когда несложно подсчитать количество всех способов), подмножество тех способов, которые нам не подходят по условию. Оставшиеся способы будут удовлетворять условию, и их количество является ответом.

Пример 5. Пять котов бабушки Зины договорились пойти погулять. Каждый кот сам решает, пойдет ли он на прогулку. Сколько у них есть способов составить компанию для прогулки хотя бы из двух котов?

Решение. Все способы можно подсчитать по правилу умножения так: первый кот либо пойдет гулять, либо нет, значит у него есть два способа сделать выбор. Так же для 2, 3,4 и 5 котов — у каждого есть два способа сделать свой выбор. Значит, множество всех способов составить компанию подсчитывается как произведение $2\times2\times2\times2\times2=32$. Но среди всех способов составить компанию котов для прогулки нам не подходят способы, когда все коты решили остаться дома (это один способ) и когда гулять готов только один какой-то кот (это пять способов). Получаем, что из 32 нужно вычесть 1 и еще 5 неподходящих способов и останутся все подходящие, которые соответствуют условию. Это 32-1-5=26 способов.

Пример 6. Сколько способов есть пройти из точки А в точку Б по стрелочкам?



Решение. Разобьем множество путей на две ситуации: когда путь проходит через точку С, и когда путь проходит через точку 0. В первой ситуации общее количество путей равно $3\times2=6$, а во второй — $5\times3=15$. Таким образом, общее количество путей равно 6+15=21.

Следующие уровни задач опираются на такие понятия: факториал, количество перестановок, размещений и сочетаний. Мы рассмотрим их в следующей главе.

ЗАДАЧИ

Задача 1. На 1-й полке стоят 7 книг, а на 2-й — 6 книг. Нужно выбрать наугад одну из книг. Сколько у нас вариантов выбрать книгу?

Задача 2. Тигрокрыс умеет отлично пользоваться одновременно двумя своими хвостами. Левый у него длиннее правого и он может им либо на лету сбивать мух, либо чесать за ухом. Правым коротким он умеет помешивать еду в миске, облизывать его или вилять из стороны в сторону. Сколько различных комбинаций его действий возможны для двух хвостов?

Задача 3. Дед Мороз перегрелся и попросил Снегурочку приготовить ему ледяного чаю с медом. У Снегурочки на кухне три сорта чая и четыре сорта меда, а из добавок — мята и чебрец. Но только одна комбинация чая с медом и добавкой целительна для Деда Мороза, а какая — Снегурочка забыла, так как Дед Мороз давным-давно не болел. Сколько стаканов чая придется выпить Деду Морозу, чтобы поправиться наверняка?

Задача 4. Вася хочет поставить на полку 4 книги, у которых обложки черного и белого цветов, и 2 книги в фиолетовых обложках (разные). Вася хочет обязательно поставить книги одного цвета вместе. Сколько у него есть способов?

Задача 5. Карина решает, как провести вечер: в театре или в клубе. Если она пойдет в театр, то наденет одно из пяти своих платьев; если в клуб, то ей придется выбрать какое-нибудь сочетание юбки и топа. У Карины 4 юбки и 10 топов. Сколько у нее способов приодеться в этот вечер?

Задача 6. У Васи три майки, пять футболок и две рубашки. Кроме того, Вася нашел в шкафу трое штанов и четверо шорт. Сколькими способами он может одеться сверху и снизу, если майки можно надевать только с шортами, а рубашки — только со штанами?

КОМБИНАТОРИКА 2

После того как учащиеся достаточно уверенно разобрались в правилах сложения и умножения для комбинаторных задач, можно переходить к следующим уровням сложности.

Введем полезное понятие (полезность будет видна из дальнейшего материала) — факториал натурального числа n: это произведение всех натуральных чисел от 1 до n. Факториал числа n обозначается восклицательным знаком — n! Например, для числа 5 его факториал вычисляется так: $5!=5\times4\times3\times2\times1=120$.

Перестановки

Количество перестановок — это количество способов расставить в ряд несколько различных предметов. При перестановке используются ВСЕ предметы. Мы их переставляем как угодно и считаем, сколько при этом получается способов.

Пример 1. У Федора есть 5 карточек с буквами его имени: Ф, Е, Д, О, Р. Каким количеством способов он может выложить все эти карточки в ряд?

Решение. Отметим на столе плюсиками в ряд пять мест для букв. На первый плюсик можно положить любую из пяти букв, это разбивает все способы на пять возможных ситуаций. Далее идея разбиения на отдельные ситуации воспроизводится внутри каждой их них: теперь есть четыре свободных плюса и четыре оставшиеся буквы. Продолжим использовать эту идею далее — теперь нужно закрыть три плюсика тремя буквами на выбор. Затем для двух оставшихся плюсиков выбор будет из двух оставшихся букв, и наконец, для последнего плюсика останется одна последняя буква.

Иными словами получаем, что для любого из пяти вариантов выбора первой буквы есть четыре варианта выбора второй буквы, три варианта выбора третьей буквы, два варианта выбора четвертой буквы и один вариант выбора пятой буквы. Тогда, применяя правило умножения, получаем, что общее число способов равно: $5\times4\times3\times2\times1 =120=5!$

Пример 2. Сегодня Вася получил в школе пятерку, тройку, единицу и замечание за поведение. Он пытается придумать, в какой последовательности преподнести эти новости маме так, чтобы она поменьше ругалась. Каким количеством способов Вася может составить последовательность новостей?

Решение: Первую новость он может преподнести четырьмя способами (пятерка, тройка, единица, замечание). Для каждого из этих вариантов вторую новость можно преподнести одним из трех способов, поскольку осталось три новости. Продолжаем рассуждение: предпоследнюю новость можно сообщить двумя способами, а последнюю — одним. Поскольку Васе нужно сообщить все четыре новости, то перемножим варианты: $4\times3\times2\times1=24$ способа.

Размещения

Количество размещений — это количество способов расставить в ряд несколько различных предметов, выбрав для расстановки только часть из всех предметов. То есть при размещении каждый раз используются не обязательно все предметы (а какое-то конкретное количество).

Замечание 1. Различные расстановки выбранных предметов — это различные размещения. Другими словами, для понятия «размещения» важен порядок следования предметов, и если он поменяется, то мы получаем различные размещения.

Замечание 2. Перестановка — это частный случай размещения, в котором в расстановке участвуют во предметы.

Пример 3. Коля не помнит, из каких цветов состоит флаг России, но помнит, что это три горизонтальные разноцветные полосы. У него есть 5 красок: синяя, зеленая, желтая, красная, белая. Сколько различных флагов может нарисовать Коля?

Решение. Для того чтобы покрасить верхнюю полосу, у Коли есть 5 вариантов. Для каждого из этих способов есть 4 варианта покрасить среднюю полосу и, наконец, для каждого выбора цвета первой и второй полосы есть 3 варианта покрасить нижнюю полосу. По правилу умножения получаем 5×4×3=60 способов.

Замечание. Пока числа небольшие, количество размещений удобно записывать как произведение. В общем случае это удобнее сделать с помощью знака факториала. Для подсчета количества размещений k предметов (3 краски), выбранных из общего количества предметов n (5 красок), требуется перемножить n, n-1 … n-k+1 (5, 4, 3) — это ровно k (3) сомножителей. Можно доказать, что количество размещений способно выражаться в общем виде так: n!:(n-k)! Такая запись удобна для восприятия и преобразований.

В примере 3, например, ответ можно записать так: 5!:(5-3)!

Пример 4. У белки есть четыре дупла — на дубе, на липе, на березе и на каштане. Белка стащила у туристов шесть видов орехов—грецкий, фундук, миндаль, кедровый, арахис и фисташки. В каждое дупло она хочет положить только один вид орехов, а остальные съесть. Сколько у нее способов сделать это?

Решение. В первое дупло — например, на дубе — белка может положить любой из шести орехов, во второе дупло — на липе — любой из оставшихся пяти орехов, в третье — на березе — любой из оставшихся четырех орехов, и, наконец, в последнее дупло — на каштане — любой из оставшихся трех орехов. Каждый раз белке нужно заполнить все четыре дупла — это размещение четырех предметов из шести. Это равно 6!:(6-4)!=6×5×4×3=360 способов.

Сочетания

Сочетания отличаются от размещений только тем, что для выбранных предметов порядок их расстановки уже не важен.

Замечание. Различные расстановки нескольких (например, трех) выбранных предметов — это одно и то же сочетание.

Пример 5. У Ильи пять карандашей разных цветов. Он хочет положить в пенал только три карандаша. Каким количеством способов он может это сделать?

Решение. Первый карандаш он может выбрать пятью способами, второй карандаш — четырьмя способами, третий карандаш — тремя способами. Пока что все так же, как при подсчете количества размещений: 5×4×3=60 способов. Теперь представим, что он выбрал первым красный карандаш (К), вторым— синий (С), а третьим — желтый (Ж). Весь набор можно обозначить КСЖ. Если же Илья выбирал те же самые карандаши, но в другом порядке, например СЖК, то по сути это все равно тот же самый набор, поскольку нас не интересует порядок выбора карандашей (потом они все вместе лежат в пенале). Значит, все перестановки трех выбранных карандашей дадут одно и то же сочетание. Количество перестановок трех карандашей равно 3!=3×2×1=6. Получается, что количество способов не 60, а в 3! раз меньше. Получаем, таким образом, что количество сочетаний равно 60:6=10 способов — это ответ на задачу.

Замечание 1. В более «цивилизованном» виде ответ задачи имеет такой вид: 5!:(2!×3!). Можно доказать, что число сочетаний для к предметов (три карандаша) из n предметов (пять карандашей) подсчитывается по формуле n!:((n-k)!×k!). Заметьте, что это та же самая формула, что и для количества размещений, но в знаменателе добавляется еще k!, поскольку мы должны учесть все повторяющиеся способы (отличающиеся только порядком), а их как раз k!

Замечание 2. Заметьте, что выбрать три карандаша, которые нужно положить в пенал, — это то же самое по смыслу, что выбрать два карандаша, которые останутся не положенными в пенал. Подобные соображения зачастую удобно использовать в задачах для упрощения подсчетов.

Пример 6. Иа-Иа стоит в нижней левой клетке прямоугольника размером 3х4 клетки. В правой верхней клетке его ждет стог сена. Ослик умеет переходить из любой клетки в соседнюю клетку вверх или направо в пределах прямоугольника. Сколько у ослика способов добраться до сена?

Решение. В своем движении ослик должен будет совершить всего 5 ходов — три вправо и два вверх в каком-то порядке. Различный порядок совершения ходов вправо и вверх будет означать различные маршруты. Тогда количество выборов двух мест для совершения хода вверх — это количество сочетаний для двух элементов из пяти. Получаем, что количество ходов равно: $5!:(3!\times2!)=10$. Остальные 3 хода будут сделаны вправо, и здесь ровно один вариант и других нет.

ЗАДАЧИ

Задача 1. У Кая в замке Снежной Королевы есть семь разных льдинок, которые он выкладывает в ряд. Каким количеством способов он может это сделать?

Задача 2. 10 человек играют в «Мафию»: а) им надо выбрать 1 мафиози, 1 доктора, 1 комиссара; б) им надо выбрать 3 мафиози (и больше никого не надо выбирать). Каким количеством способов это можно сделать?

Задача 3. Сколько существует вариантов перестановки букв в слове ПРОСО?

Задача 4. Сколько чисел можно составить из 5 карточек 1, 2, 3, 4, 5?

Задача 5. В математическом кружке занимаются 2 девочки и 7 мальчиков. Для участия в турнире необходимо составить команду из четырех человек, в которую обязательно должна входить хотя бы одна девочка. Сколькими способами это можно сделать?

Задача 6. Сколько существует способов переставить буквы в слове ПРОСО так, чтобы две буквы О не стояли рядом?